

République Arabe d'Égypte
Ministère de L'Éducation et
de L'Enseignement et
L'Enseignement technique
Administration centrale
des affaires de livres

Mathématiques

Livre de l'élève

Première secondaire **Premier semestre**



Les mathématiques ont des applications pratiques dans différents domaines dont la construction de routes, de ponts, l'urbanisme, l'élaboration de plans qui repose sur des lignes parallèles et des lignes qui les coupent selon une proportion entre la longueur réelle et la longueur représentée sur le plan.

La photo montre le pont Al Salam qui relie les deux rives du canal de suez

2019 – 2020

Rédigé par

M. Omar Fouad Gaballa

Prof. Dr. Afaf Abo-ElFoutoh Saleh — Prof. Dr. Nabil Tawfik Eldhabai

Dr. Essam Wasfy Rouphaiel — M. Serafiem Elias Skander

M. Kamal Yones Kabsha

La Traduction Révisée par

M.Hussein Mahmoud Hussein

conseiller pour les mathématiques

M. Fathi Ahmed Chehata — M. Adel Mohamed Hamza

M. Nasser Saad Zaghloul

Issued: 2013

D.N : 2013 / 7116

ISPN : 978 - 977 - 706 - 005 - 9

INTRODUCTION

بسم الله الرحمن الرحيم

En présentant ce manuel, nous sommes heureux de vous clarifier la philosophie dont nous nous sommes inspirés pour édifier son contenu, en la résumant dans ce qui suit :

1. S'assurer que l'objectif essentiel de ce manuel et d'aider l'apprenant à résoudre les problèmes et à prendre les décisions, dans sa vie quotidienne pour une meilleure participation dans la société.

2. S'assurer du principe de la continuité de l'apprentissage tout au long de la vie, faisant en sorte que les élèves acquièrent un mode de pensée scientifique, et qu'ils pratiquent un apprentissage mêlé de désir et de convoitise. Ceci en misant sur le développement de leur habilitée à résoudre les problèmes, à déduire et démontrer les résultats, à utiliser l'auto apprentissage, l'apprentissage actif avec l'esprit de groupe, la discussion et le dialogue, le respect de l'opinion de l'autre, l'objectivité dans le jugement et la définition de quelques activités et réalisations nationales.

3. Présenter une vue globale consolidée entre la science, la technologie et la société (STS) qui reflète le rôle du progrès scientifique dans le développement de la société locale, en plus de cela l'insistance sur un comportement consciencieux dans l'utilisation des outils technologiques.

4. Développement des tendances positives envers les mathématiques, leurs études et l'estimation des savants.

5. Munir les élèves d'une culture complète pour une meilleure utilisation des ressources disponibles dans l'environnement.

6. Renforcer les bases de la connaissance et le développement des méthodes de pensée, développer les capacités scientifiques, ne pas surcharger inutilement et s'éloigner du par cœur. Dans ce but, il est important de mettre en valeur les notions et les principes généraux, les méthodes de recherche, de résolution, de la pensée qui distinguent les mathématiques du reste.

A la lumière de ce qui précède, ce manuel est organisé comme suit :

- ★ Division du manuel en unités complètes reliées entre elles. Chacune des ces unités a une introduction qui éclaircit son objectif, son contenu, son organisation et le lexique employé, en arabe et en anglais. Elles sont divisées en leçons dont l'objectif est indiqué à l'élève sous la rubrique 'A apprendre'. Chaque leçon commence par l'idée essentielle du contenu et l'exposition de la matière d'une manière progressive. Ces unités comportent aussi un ensemble d'activités, du niveau de l'élève, qui soulignent le lien entre différentes matières ainsi qu'avec la vie pratique. Ces activités prennent en compte les capacités des élèves, leurs différences individuelles et renforcent le travail en groupe pour compléter le sujet.
- ★ Nous avons proposé, dans chaque leçon, des exemples à difficulté croissante, différents niveaux de réflexion, des exercices d'entraînement sous la rubrique 'essaie de résoudre' et chaque leçon se termine par 'Test de compréhension'.
- ★ Chaque unité se termine par un résumé contenant les notions et les instructions employées.

Finalement, nous espérons qu'avec ce manuel nous accomplirons le bien pour nos élèves et pour notre cher Égypte. Dieu nous est témoin, qu'il nous guide vers le bon chemin.

Plan du livre du premier semestre

Unité	*Leçons*	*Notions abordées*	*Opérations intellectuelles et compétences mentales*	*Liens avec d'autres disciplines et avec la vie quotidienne.*
1 Algèbre, relations et fonctions	1 - 1: **Résolution d'une équation du second degré à une inconnue**	Équation – Relation – Fonction – Facteur	‣ Réflexion critique P6 ‣ Résolution de problèmes P6 ‣ Réflexion algébrique (pendant l'exposition de la leçon)	‣ Lien avec la physique P6 ‣ Lien avec le sport P7
	1 - 2: **Introduction aux nombres complexes**	Nombre imaginaire – Nombre complexe	‣ Réflexion critique P9, 11, 12 ‣ Réflexion algébrique (pendant l'exposition de la leçon)	‣ Lien avec la technologie P7 ‣ Lien avec l'électricité P12
	1 - 3: **Détermination de la nature des racines d'une équation du second degré**	Racine – Discriminant – Équation	‣ Réflexion critique P15 ‣ Résolution de problèmes P15 ‣ Réflexion algébrique (pendant l'exposition de la leçon)	‣ Lien avec la Santé P15
	1 - 4: **Relation entre les racines d'une équation du second degré et les coefficients de ses termes**	Somme de deux racines – Produit de deux racines	‣ Réflexion orale P16 ‣ Réflexion critique P19 ‣ Réflexion algébrique (pendant l'exposition de la leçon)	
	1 - 5: **signe d'une fonction**	Signe d'une fonction – Fonction positive – Fonction négative	‣ Réflexion logique P20, 21, 22 ‣ Réflexion algébrique (pendant l'exposition de la leçon)	
	1 - 6: **Résolution d'une inéquation du second degré à une inconnue**	Inéquation	‣ Réflexion logique P26 ‣ Réflexion critique P27 ‣ Réflexion algébrique (pendant l'exposition de la leçon)	
2 Similitude	2 - 1: **Similitude des polygones**	Similitude – Polygones semblables – Triangles semblables – Côtés correspondants – Angles superposables	‣ Réflexion logique ‣ Réflexion inductive ‣ Réflexion géométrique (pendant l'exposition de la leçon)	‣ Lien avec la physique p.45 ‣ Application de la vie quotidienne p.41
	2 - 2: **Similitude des triangles**	Similitude – Similitude des triangles – Axiome	‣ Réflexion logique ‣ Réflexion inductive ‣ Réflexion géométrique (pendant l'exposition de la leçon)	‣ Lien avec la physique p.47
	2 - 3: **Relation entre les aires de deux polygones semblablese**	Périmètre – Aire – Aire d'un polygone – Côtés correspondants	‣ Réflexion logique ‣ Réflexion inductive ‣ Réflexion géométrique (pendant l'exposition de la leçon)	‣ Lien avec la géographie p.55 ‣ Lien avec l'agriculture p.58
	2 - 4: **Application de la similitude dans le cercle**	Une corde – Une sécante – Une tangente – Un diamètre – Tangente commune extérieurement – Tangente commune intérieurement	‣ Réflexion logique ‣ Réflexion inductive ‣ Réflexion géométrique (pendant l'exposition de la leçon)	‣ Lien avec la géologie P64 ‣ Lien avec l'industrie P65 ‣ Lien avec la géométrie des trafiques P65 ‣ Lien avec l'espace P65

Unité	Leçons	Notions abordées	Opérations intellectuelles et compétences mentales	Liens avec d'autres disciplines et avec la vie quotidienne.
3 Théorèmes de la proportion dans un triangle	3 - 1: Droite parallèles et parties proportionnelles	Parallélisme – Bissectrice – Médiane – Sécante	▸ Réflexion logique – Réflexion inductive – Réflexion géométrique (pendant l'exposition de la leçon) ▸ Modélisation des mathématiques P76 ▸ Résolution de problème P80 ▸ Réflexion critique P80 ▸ Démonstration par des diagrammes (l'enchaînement de la démonstration) P76	▸ Lutter contre la pollution P77 ▸ Lien avec les constructions P80 ▸ Lien avec l'industrie P80
	3-2 Bissectrice d'un angle et parties proportionnelles	Bissectrice – Bissectrice intérieure – Bissectrice extérieure – Perpendiculaire	▸ Réflexion logique – Réflexion inductive – Réflexion géométrique (pendant l'exposition de la leçon) ▸ Réflexion critique P83 ▸ Résolution de problème P86	▸ Lien avec l'art P41 ▸ Applications de la vie quotidienne P41
	3-3 Applications de la proportionnalité dans un cercle	Puissance – Point – Cercle – Corde – Tangente – Sécante – Diamètre – Cercles concentriques – Tangente commune extérieurement – Tangente commune intérieurement	▸ Réflexion logique – Réflexion inductive – Réflexion géométrique (pendant l'exposition de la leçon) ▸ Résolution de problème P93	▸ Lien avec les satellites P92
4 Trigonométrie	4 - 1: L'angle orienté	Mesure en degrés – Angle orienté – Position standard – Mesure positive – Mesure négative – Angle équivalent	▸ Réflexion critique P99 ▸ Réflexion orale P99	▸ Lien avec le sport P102
	4-2 Mesure en radians et mesure en degrés	Mesure en degrés – Mesure en radians – Le radian	▸ Réflexion critique P106	▸ Lien avec la technologie P106 ▸ Liens avec l'espace P107 ▸ Lien avec le sport P107 ▸ Lien avec l'industrie P107
	4-3 Fonctions trigonométriques	Fonction trigonométrique – Sinus – Cosinus – Tangente – Sécante – Cosécante – Cotangente	▸ Réflexion critique P113	
	4-4 Angles associés	Angles associés	▸ Réflexion critique P115	
	4-5 Représentation graphique des fonctions trigonométriques	La fonction Sinus – La fonction Cosinus – Valeur maximale – Valeur minimale		▸ Liens avec la physique P122
	4-6 Trouver la mesure d'un angle à partir d'une fonction trigonométrique	Fonction trigonométrique	▸ Réflexion critique P124	▸ Lien avec la technologie P123 ▸ Lien avec le sport P124 ▸ Lien avec les voitures P124

Sommaire

Unité (1) Algèbre, relations et fonctions

Unité (2) Similitude

Unité (3) Théorèmes de la proportion dans un triangle

Unité (4) Trigonométrie



Algèbre, relations et fonctions

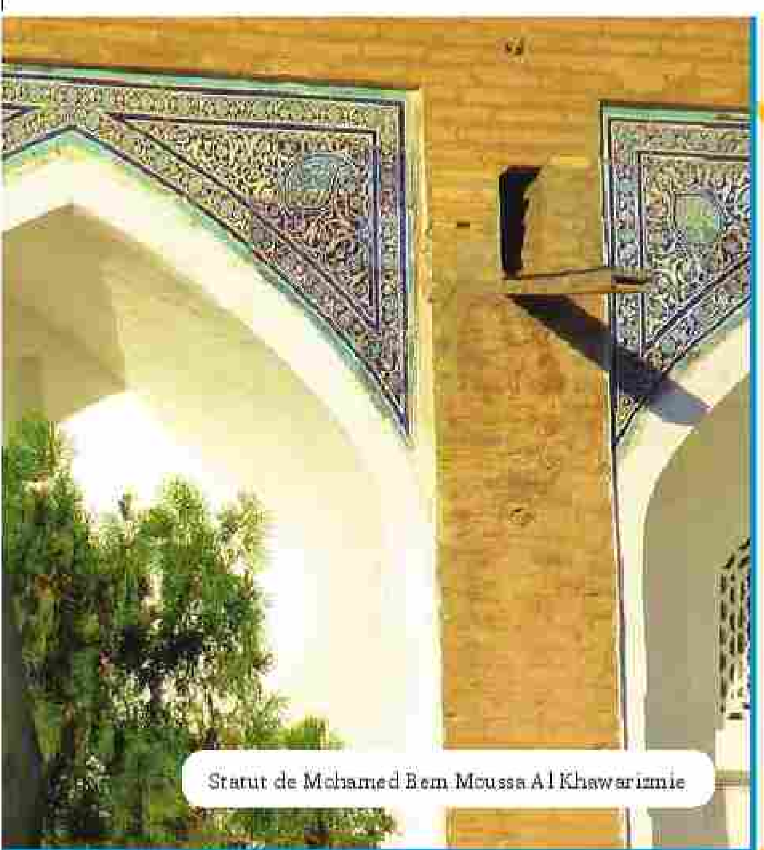
Objectifs de l'unité

Après l'étude de l'unité, l'élève devra être capable de :

- Résoudre une équation du second degré à une inconnue algébriquement et graphiquement.
- Trouver la somme et le produit des racines de l'équation du second degré à une inconnue.
- Trouver les coefficients de certains termes d'une équation du second degré à une inconnue en connaissant l'une ou les deux de ses racines.
- Identifier le discriminant d'une équation du second degré à une inconnue.
- Trouver la nature des deux racines d'une équation du second degré à une inconnue en connaissant les coefficients de ses termes.
- Former une équation du second degré à une inconnue connaissant une autre équation du second degré à une inconnue.
- Trouver le signe d'une fonction.
- Avoir des connaissances sur les nombres complexes (Définition d'un nombre complexe, les puissances de i , écrire un nombre complexe sous forme algébrique, égalité de deux nombres complexes)
- Résoudre une inéquation du second degré à une inconnue.

Expressions de base

- Équation
- Racine d'une équation
- Coefficient d'un terme
- Discriminant d'une équation
- Signe d'une fonction
- Nombre complexe
- Nombre imaginaire
- Les puissances d'un nombre
- Inéquation



Statut de Mohamed Bem Moussa Al Khawarizmie

Leçons de l'unité

Leçon (1 – 1) : Résolution d'une équation du **second** degré à une inconnue

Leçon (1 – 2) : Introduction aux nombres complexes

Leçon (1 – 3) : Détermination de la nature des racines d'une équation du second degré

Leçon (1 – 4) : Relation entre les racines d'une équation du second degré et les coefficients de ses termes

Leçon (1 – 5) : Signe d'une fonction

Leçon (1 – 6) : Inéquation du second degré à une inconnue

Matériel utilisé

Une calculatrice scientifique – Papiers graphiques – Ordinateur – Logiciels

Quelques site web comme www.phschool.com

Historique

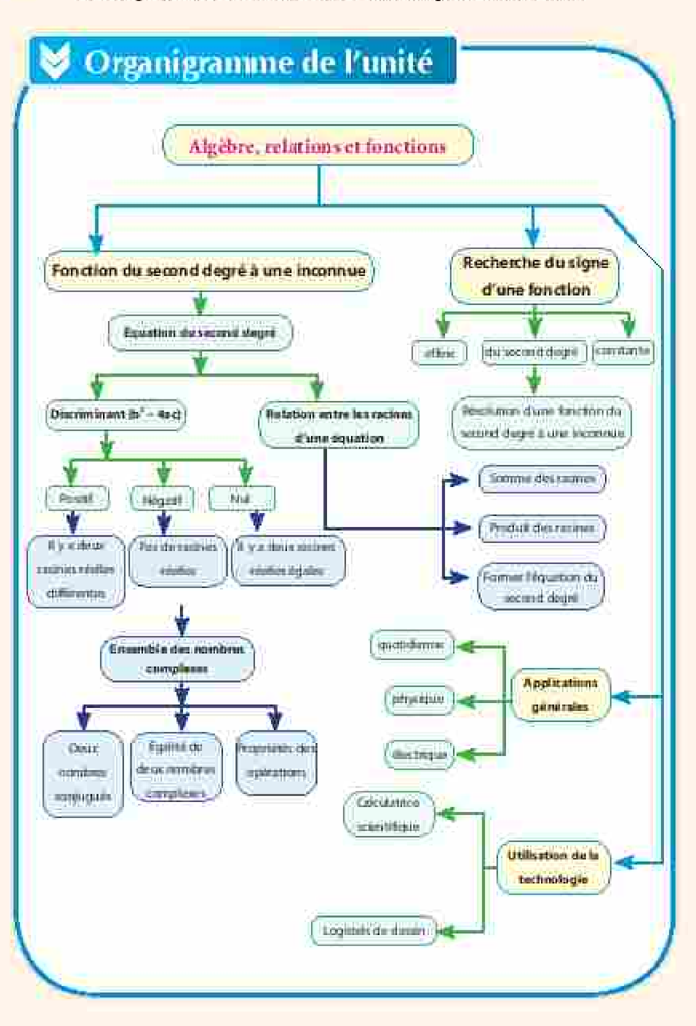
Le mot « Algèbre » est d'origine arabe. Il a été utilisé pour la première fois par Mohamed Bem Moussa Al Khawarizmie (neuvième siècle à l'époque du calife abbasside Al Maamoun) dans son livre « Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison » Ce livre a été traduit en plusieurs langues européennes. Dans ce livre, il propose des méthodes pour résoudre les équations et par conséquent, il est considéré le fondateur de l'Algèbre qui faisait partie de l'Arithmétique. Al Khawarizmie a proposé de méthodes géométriques pour résoudre les équations du second degré. Ces méthodes sont en adéquation avec la méthode de complétion du trinôme carré parfait. Plusieurs savants arabes ont contribué à la résolution des équations, parmi lesquels il y a Omar Al Khayyam qui s'est intéressé à la résolution des équations du troisième degré.

Il est important de signaler que le papyrus d'Amos (1860 A.J.) montre des solutions de problèmes qui prouvent que les égyptiens de cette époque ont trouvé une méthode pour calculer la somme des termes d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique.

L'Algèbre est devenue maintenant une science bien avancée. Cette science a dépassé le simple traitement des nombres pour traiter des nouvelles notions mathématiques comme les ensembles, les matrices et les vecteurs etc.

Nous comptons sur vous, chers élèves, pour retrouver la gloire scientifique de l'époque pharaonique et l'époque islamique pendant lesquelles nos scientifiques ont contribué pour le progrès du monde entier.

Organigramme de l'unité



1 - 1 Résolution d'une équation du second degré à une inconnue

A apprendre

- La notion d'équation algébrique à une inconnue.
- La distinction entre équations, relations et fonctions.
- La résolution d'une équation du deuxième degré à une inconnue algébriquement et graphiquement.



Expressions de base

- Équation
- Relation
- Fonction
- Facteur
- Coefficient

Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique
- Papiers graphiques



Tu as déjà étudié les équations algébriques à une inconnue. Dans cette leçon, tu vas étudier les équations algébriques de deuxième degré à une inconnue.

Voici ce que nous avons déjà étudié des équations algébriques à une inconnue :

1- L'équation de la forme $a\,x + b = 0$ où $a \neq 0$ est une équation du premier degré à une inconnue qui est x dans ce cas (car la plus grande puissance de la variable x est 1)

2- L'équation de la forme $ax^2 + b\,x + c = 0$ où $a \neq 0$ est une équation du second degré à une inconnue qui est x dans ce cas (car la plus grande puissance de la variable x est 2)

Par conséquent, l'équation : $2x^3 - 3x^2 + 5 = 0$ est appelée une équation du troisième degré (car la plus grande puissance de la variable x est 3)

Équations, relations et fonctions :

Nous avons déjà étudié la résolution d'une équation du second degré algébriquement par les deux méthodes suivantes :

(1) Par la factorisation de l'expression $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$ (si la factorisation est possible dans $\mathbb{R}$)

(2) En utilisant la formule générale. Dans ce cas, les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ où a est le coefficient de x^2, b est le coefficient de x et c est le terme constant

Maintenant, nous allons étudier la résolution d'une équation du second degré à une inconnue graphiquement.



Résolution d'une équation du second degré graphiquement



1 Résous l'équation : $x^2 + x - 6 = 0$ graphiquement, puis vérifie le résultat

Solution

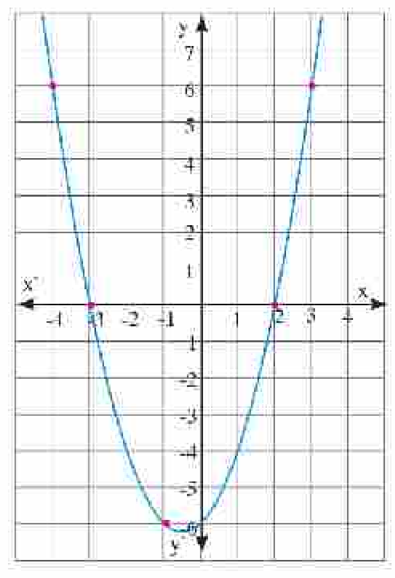
Pour résoudre l'équation $x^2 + x - 6 = 0$, on suit les étapes suivantes :

★ On trace la représentation graphique de la fonction f telle que $f(x) = x^2 + x - 6$

★ On détermine l'ensemble des abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. C'est l'ensemble solution de l'équation.

Pour tracer la fonction $f(x) = y$, $y = x^2 + x - 6$,
on dresse un tableau pour quelques valeurs de x, puis on calcule les valeurs des y correspondantes comme suit :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6



★ On détermine ces points dan un repère orthogonal, puis on les relie comme dans la figure ci-contre.

Du graphique, on trouve que les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses sont $x = -3$ et $x = 2$. Donc l'ensemble solution de l'équation $x^2 + x - 6 = 0$ est **{-3, 2}.**

Tu peux utiliser la solution algébrique pour vérifier la solution graphique comme suit :

Dans l'équation : $x^2 + x - 6 = 0$,
on factorise le trinôme. On obtient : $(x + 3)(x - 2) = 0$
Soit $x + 3 = 0$ d'où $x = -3$
ou $x - 2 = 0$ d'où $x = 2$ Donc l'ensemble solution est {- 3, 2}

Rappel

Si a et b sont deux nombres réels et si a × b = 0 alors, a = 0 ou b = 0

Vérification de la solution :

Pour x = -3: le membre gauche de l'équation = $(-3)^2 + (-3) - 6$
$= 9 - 3 - 6 = 0$ = membre droit

Donc $x = -3$ vérifie l'équation.

Pour $x = 2$: le membre gauche de l'équation $= (2)^2 + (2) - 6$
$= 4 + 2 - 6 = 0$ = membre droit

Donc $x = 2$ vérifie l'équation.

Notons que :

1- Dans la représentation graphique de la fonction $y = x^2 + x - 6$

➢ la relation représente une fonction car une droite verticale coupe la courbe en un seul point.

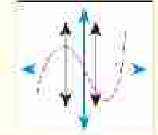
➢ le domaine de définition de la fonction est l'ensemble des nombres réels.

➢ L'ensemble image de la fonction est $[-6\frac{1}{4}, +\infty[$

2- Pour exprimer la fonction, on utilise le symbole f(x) au lieu de y qui se lit «f de x»

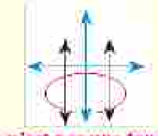


Test de la droite verticale



C'est une fonction

une droite verticale coupe la courbe en un seul point



Ce n'est pas une fonction

une droite verticale coupe la courbe en deux points au moins

Utilisation d'une calculatrice scientifique :

Il est possible de dresser le tableau précédent en utilisant une calculatrice scientifique comme suit :

1- Préparer la calculatrice en appuyant sur les touches

Mode 7 TABLE

2- **Introduire les données :** On écrit l'expression algébrique de la fonction en appuyant sur les touches suivantes:

ALPHA ((X) x^2 + ALPHA) (X) − 6

3- On appuie sur la touche = puis on introduit le début de l'intervalle STARTP -4 puis on appuie sur la touche =

4- On introduit la longueur de l'intervalle STEP , on écrit le chiffre 3 , en fin on appuie sur la touche =

5- Le tableau sera dressé dans la calculatrice. On peut faire apparaître les informations en appuyant sur la touche REPLAY, vers le haut ou vers le bas

	X	F(X)
1	-4	6
2	-3	0
3	-2	-4
4	-1	-6
5	0	-6
6	1	-4
7	2	0
8	3	6

Pour sortir de ce programme, on appuie sur les touches Mode 1

Réflexion critique :

1- une fonction, est - elle nécessairement une relation ? Explique par des exemples.

2- Peut-on représenter les relations et les fonctions par des équations? Justifie la réponse.

Essaie de résoudre

1 Représente la relation $y = x^2 - 4$ graphiquement. Du graphique, trouve l'ensemble solution de l'équation $x^2 - 4 = 0$ Si $y = f(x)$, démontre que f est une fonction, puis détermine son domaine de définition et son ensemble image (Discute avec ton professeur)

Exemple

2 **Lien avec la physique :** Un projectile est lancé verticalement à une vitesse v de 24.5 m/s. Calcule le temps t en secondes pris pour que le projectile atteigne la hauteur d où d est égale à 19.6 mètres sachant que la relation entre d et t est donnée par la relation : $d = v\,t - 4{,}9\,t^2$.

Solution

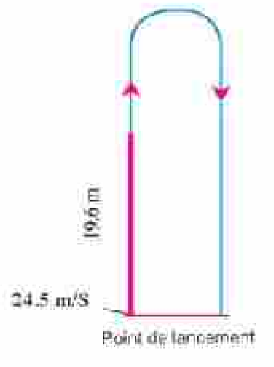
Dans la relation $d = v\,t - 4{,}9\,t^2$, si $d = 19{,}6$ mètres et $v = 24{,}5$ m/s, alors :

$\therefore\ 19{,}6 = 24{,}5\,t - 4{,}9\,t^2$ **En divisant les deux membres par 4,9 on obtient :**

$\therefore\ 4 = 5t - t^2$ **En Simplifiant**

$\therefore\ t^2 - 5t + 4 = 0$ **En factorisant le trinôme :**

$\therefore\ (t - 1)(t - 4) = 0$ **d'où** $t = 1$ s ou $t = 4$ s.



Interprétation de l'existence de deux réponses : Le projectile atteint la hauteur de 19.6 m après une seconde puis il continue à monter jusqu'à ce que il atteigne la hauteur maximale, puis il redescend passant par le point de lancement 4 secondes après le départ.

Essaie de résoudre

2 **Lien avec le sport :** Dans un jeu olympique, un concourant saute d'un plongeoir d'une hauteur de 9,8 mètres de la surface de l'eau vers le haut. Si la hauteur d en mètres du concourant de la surface de l'eau après un temps t secondes est déterminée par la relation $d = -4{,}9t^2 + 2{,}45t + 9{,}8$, trouve à un centième près le temps nécessaire pour que le concourant atteigne la surface de l'eau.

Activité

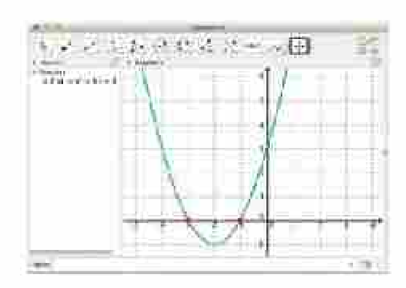
On peut utiliser des logiciels de droit libre sur Internet. Par exemple, on peut télécharger le logiciel "GeoGebra" à l'adresse (http://www.geogebra.org/cms/fr/) ou télécharger le logiciel Graph à l'adresse (http://www.padowan.dk/) Ces deux logiciels permettent de tracer des courbes de fonctions.

A On peut tracer la courbe représentative de la fonction f telle que $f(x) = x^2 + 4x + 3$

On détermine l'ensemble solution de l'équation $f(x) = 0$

ou $x^2 + 4x + 3 = 0$

en déterminant les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. Ce sont -3 et -1. Donc l'équation a deux racines dans $\mathbb{R}$ qui sont -3 et -1



B On trace la courbe représentative de la fonction f telle que

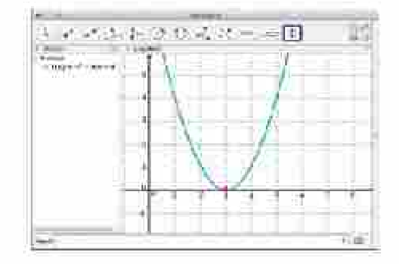
$f(x) = x^2 - 6x + 9$

On pose $f(x) = 0$, On obtient $(x - 3)^2 = 0$ d'où $x = 3$

Du graphique, on trouve que le sommet de la courbe est tangent à l'axe des abscisses en $x = 3$

Cette solution est conforme à la solution algébrique.

Donc l'équation a une racine double qui est 3.

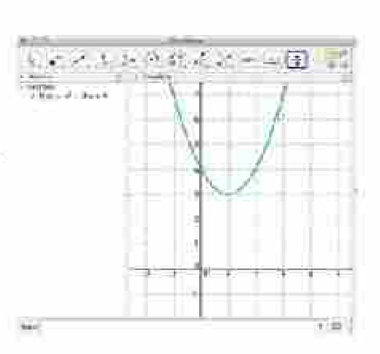


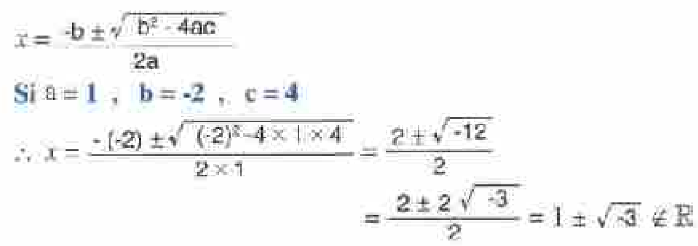
C On trace la courbe représentative de la fonction f telle que

$f(x) = x^2 - 2x + 4$

On pose $f(x) = 0$. On obtient $x^2 - 2x + 4 = 0$

Vu que la factorisation du trinôme n'est pas possible, on utilise la formule générale pour calculer les racines de l'équation.





$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $a = 1$, $b = -2$, $c = 4$

$$\therefore\ x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

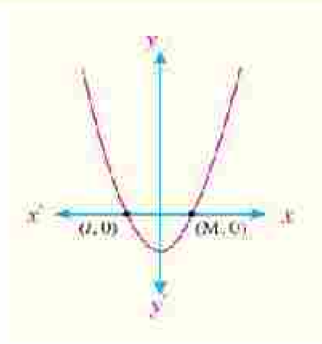
$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{-3}}{2} = 1 \pm \sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$$

Donc il n'y a pas de solutions réelles qui vérifient l'équation.

Dans la représentation graphique de la fonction, on trouve que la courbe ne coupe l'axe des abscisses en aucun point. Par conséquent, l'ensemble solution dans $\mathbb{R}$ est ϕ.

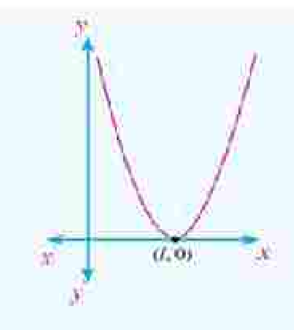
De ce qui précède, on trouve que pour résoudre une équation du second degré, il y a trois cas :

1- La courbe coupe l'axe des abscisses en deux points.



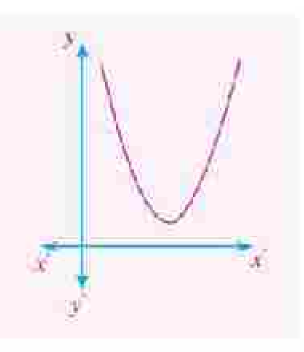
Il y a deux solutions dans $\mathbb{R}$, L'ensemble solution est {L , M}

2- La courbe coupe l'axe des abscisses en un seul point



Il y a une solution dans $\mathbb{R}$, L'ensemble solution est {M}

3- La courbe ne coupe pas l'axe des abscisses.



Il n'y a pas de solution dans $\mathbb{R}$, L'ensemble solution est ϕ

Test de compréhension

① **Résolution de problèmes:** Si la somme des nombres entiers consécutifs $(1 + 2 + 3 + ... + n)$ est donnée par la relation $S = \frac{n}{2}(1 + n)$, combien de nombres entiers consécutifs faud-il additionner à partir de 1 pour que la somme soit égale à 136.

Introduction aux nombres complexes

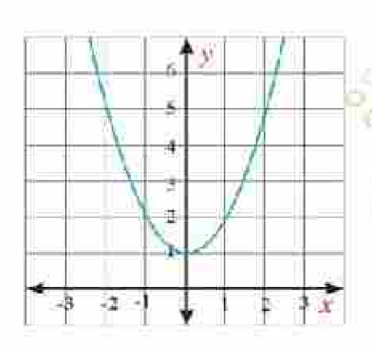
1 - 2



Tu as déjà étudié plusieurs ensembles de nombres comme l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres entiers $\mathbb{Z}$, l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres irrationnels $\mathbb{Q}'$ et l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Nous avons vu que chaque ensemble est un élargissement de l'ensemble qui le précède pour pouvoir résoudre de nouvelles équations dont il est impossible de trouver une solution dans l'ensemble qui le précède. Maintenant si on observe l'équation $x^2 = -1$, on trouve qu'elle n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, car il n'existe pas un nombre réel dont le carré est égal à (-1) et par conséquent, il n'existe pas un nombre réel qui vérifie l'équation d'où le besoin d'un nouvel ensemble de nombres. Cet ensemble est appelé l'ensemble des nombres complexes.

La figure ci-contre montre la représentation graphique de la fonction $y = x^2 + 1$

On remarque que la courbe représentative de la fonction ne coupe pas l'axe des abscisses et par conséquent, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$. Donc il est nécessaire de trouver un nouvel ensemble de nombres qui permet de résoudre ce type d'équations.



A apprendre

- La notion du nombre imaginaire.
- Les puissances de i.
- La notion d'un nombre complexe.
- Égalité de deux nombres complexes.
- Opérations sur les nombres complexes.

Expressions de base

- Nombre imaginaire
- Nombre complexe



Le nombre imaginaire

Tout nombre de la forme a i où a est un nombre réel et i est tel que $i^2 = -1$ est un nombre imaginaire.

Les nombres 2i, - 5i et $\sqrt{3}$ i sont des **nombres imaginaires**

Donc on écrit $\sqrt{-3} = \sqrt{3i^2} = \pm\sqrt{3}\, i$,

$\sqrt{5} = \sqrt{5\, i^2} = \pm\sqrt{5}$ i et ainsi de suite...

$\sqrt{-243} = \sqrt{9^2 \times 3\,(-1)} = 9\sqrt{3}\, i$

Réflexion critique : Si a et b sont deux nombres réels négatifs, que peut-on dire de l'égalité $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$? Justifie ta réponse par des exemples numériques.

Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique

Puissances entières de i :

Toutes les règles de puissance qui sont déjà étudiées s'appliquent sur le nombre i. Nous pouvons calculer les différentes puissances du nombre i comme suit :

$i^1 = i$ $\quad$ $i^2 = -1$ $\quad$ $i^3 = i^2 . i = -i$

$i^4 = i^2 \times i^2 = -1 \times (-1) = 1$ $\quad$ $i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$

De manière générale, $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$ **où** $n \in \mathbb{Z}$

Exemple

2 Mets chacun des nombres suivants sous la forme la plus si

A i^{30} $\quad$ **B** i^{43} $\quad$ **C** i^{-61} $\quad$ **D** i^{4n+19}

Solution

A $i^{30} = (i^4)^7 \times i^2 = 1 \times (-1) = -1$

B $i^{43} = (i^4)^{10} \times i^3 = 1 \times (-i) = -i$

C $i^{-61} = (i^4)^{-16} \times i^3 = 1 \times i^3 = -i$

D $i^{4n+19} = i^{4n} \times i^{19} = 1 \times (i^4)^4 \times i^3 = 1 \times i^3 = -i$

Essaie de résoudre

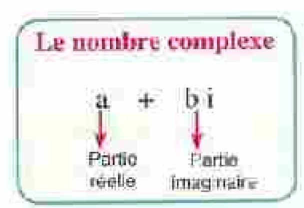
1 Mets chacun des nombres suivants sous la forme la plus simple :

A i^{24} $\quad$ **B** i^{37} $\quad$ **C** i^{-43} $\quad$ **D** i^{-51} $\quad$ **E** i^{4n+29} $\quad$ **F** i^{4n+43}

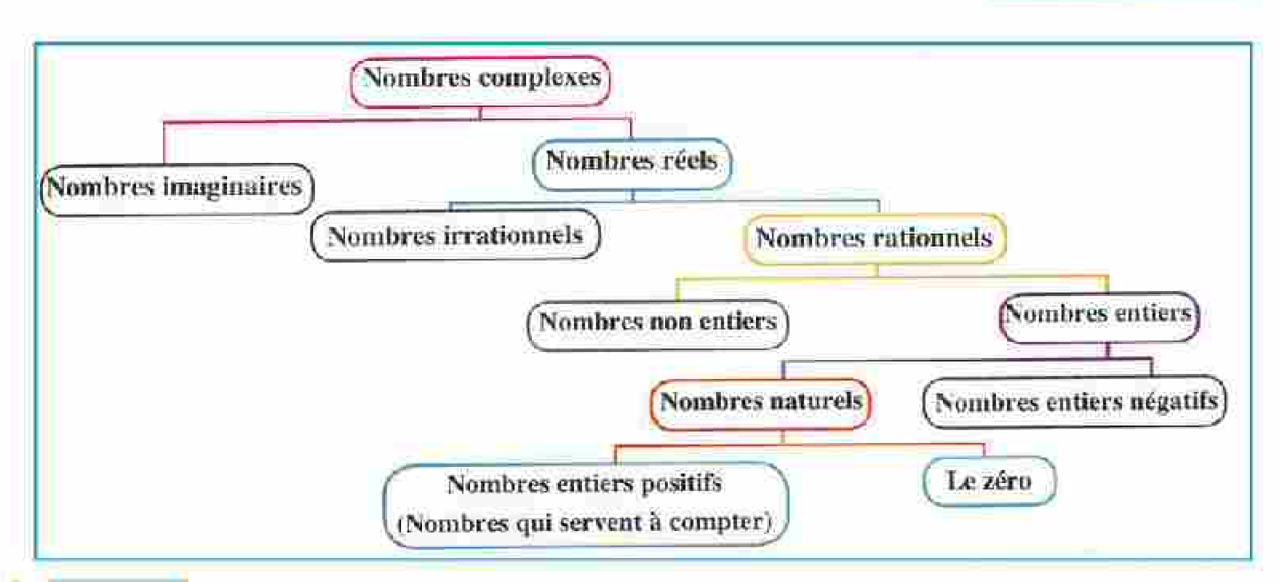


Le nombre complexe

Le nombre complexe est un nombre qu'on peut mettre sous la forme $a + bi$ où a et b sont deux nombres réels et i est tel que $i^2 = -1$.



La figure suivante montre les ensembles des nombres faisant parties de l'ensemble des nombres complexes.



Si a et b sont deux nombres réels, alors le nombre z où z = a + bi , est un nombre complexe. a est appelée la partie réelle du nombre complexe z et b est appelée la partie imaginaire du nombre complexe z

Si b = 0 , alors z = a est un nombre réel et si a = 0, alors z = bi est un nombre imaginaire pur

Exemple

3 Résoudre l'équation $9x^2 + 125 = 61$

Solution

$9x^2 + 125 = 61$

$9x^2 + 125 - 125 = 61 - 125$ — On ajoute (-125) à chacun des deux membres

$9x^2 = -64$ — On simplifie

$x^2 = -\frac{64}{9}$ — On divise les deux membres par 9

$x = \pm\sqrt{\frac{-64}{9}}$ — On calcule la racine carrée de chaque membre

$x = \pm\sqrt{\frac{64}{9}}\,i = \pm\frac{8}{3}\,i$

Essaie de résoudre

2 Résous chacune des équations suivantes :

A $3x^2 + 27 = 0$ **B** $5x^2 + 245 = 0$ **C** $4x^2 + 100 = 75$

Égalité de deux nombres complexes :

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales.

Si : a + b i = c + d i , alors : a = c et b = d et réciproquement.

Exemple

4 Trouve les valeurs de x et y qui vérifient l'équation : $2x - y + (x - 2y)i = 5 + i$ où x et y sont deux nombres réels et $i^2 = -1$

Solution

Les parties réelles sont égales et les parties imaginaires sont égales.

$2x - y = 5 \quad , \quad x - 2y = 1$

En résolvant le système des deux équations, on obtient $x = 3 \quad , \quad y = 1$

Essaie de résoudre

(3) Trouve les valeurs de x et y qui vérifient chacune des équations suivantes :

A $(2x + 1) + 4y\,i = 5 - 12\,i$

B $2x - 3 + (3y + 1)\,i = 7 + 10\,i$



Opérations sur les nombres complexes

Nous pouvons utiliser les propriétés de la commutativité, l'associativité et de la distributivité pour l'addition et la multiplication des nombres comme dans les exemples suivants :

Exemple

(5) Mets les nombres suivants sous la forme la plus simple :

A $(7 - 4i) + (2 + i)$

B $(2 + 3i)(3 - 4i)$

Solution

A $(7 - 4i) + (2 + i)$

$= (7 + 2) + (-4 + 1)\,i$ utiliser les propriétés de la commutativité et la distributivité

$= 9 - 3\,i$ en simplifiant

B $(2 + 3i)(3 - 4i)$

$= 2(3 - 4i) + 3i(3 - 4i)$ utiliser la propriété de la distributivité

$= 6 - 8i + 9\,i - 12\,i^2$ en développant

$= 6 - 8i + 9i + 12$ car $i^2 = -1$

$= (6 + 12) + (-8 + 9)\,i = 18 + i$ en simplifiant

Essaie de résoudre

(4) Mets les nombres suivants sous la forme la plus simple :

A $(12 - 5i) - (7 - 9i)$

B $(4 - 3i)(4 + 3i)$

C $(5 - 6i)(3 + 2i)$

Deux nombres conjugués

Les deux nombres a + b i et a – b i sont appelés deux nombres conjugués. **Par exemple,** 4 – 3i et 4 + 3i sont deux nombres conjugués où :

$(4 - 3i)(4 + 3i) = (4)^2 - (3i)^2$

$= 16 - 9i^2 = 16 - 9(-1) = 25$ **(le résultat est un nombre réel)**

Réflexion critique :

La somme de deux nombres conjugués est-elle toujours un nombre réel ? Explique ta réponse.

Le produit de deux nombres conjugués est-il toujours un nombre réel ? Explique ta réponse.

Exemple

6 Trouve les valeurs de x et y qui vérifient l'équation :

$\frac{(2+i)(2-i)}{3+4i} = x + i\,y$

Solution

$\frac{4 - i^2}{3 + 4i} = x + iy$ **en développant**

$\frac{4 + 1}{3 + 4i} \times \frac{3 - 4i}{3 - 4i} = x + iy$ **en multipliant le numérateur et le dénominateur par (3 - 4i)**

$\frac{5(3 - 4i)}{25} = x + iy$ **en simplifiant**

$\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i = x + yi$ **en appliquant la règle de l'égalité de deux nombres complexes**

Donc $x = \frac{3}{5}$, $y = -\frac{4}{5}$

Essaie de résoudre

5 Mets les nombres suivants sous la forme la plus simple :

A $\frac{4 - 6i}{2i}$ **B** $\frac{26}{3 - 2i}$

C $\frac{3 - i}{2 - i}$ **D** $\frac{3 + 4i}{5 - 2i}$

Exemple

7 **Électricité :** Trouve l'intensité du courant électrique passant entre deux résistances placées en parallèle dans un circuit électrique fermé sachant que l'intensité du courant dans la première résistance est $5 - 3i$ Ampère et que l'intensité du courant dans la deuxième résistance est $2 + i$ Ampère (sachant que l'intensité totale du courant électrique est égale à la somme des intensités des courants passant par les deux résistances)

Solution

$\because$ Intensité totale du courant = somme des intensités des courants passant par les deux résistances.

$\therefore$ $= (5 - 3i) + (2 + i)$

$= (5 + 2) + (-3 + 1)\, i$

$= 7 - 2i$ Ampère

Essaie de résoudre

6 Si l'intensité totale du courant électrique passant entre deux résistances placées en parallèle dans un circuit électrique fermé est égale à $6 + 4\,i$ Ampère et si l'intensité du courant passant dans l'une des deux résistances est égale à $\frac{17}{4 - i}$, trouver l'intensité du courant passant dans l'autre résistance.

Test de compréhension

1 **Réflexion critique :** Mets sous la forme la plus simple : $(1 - i)^{10}$.

Détermination de la nature des racines d'une équation du second degré

1 - 3



Tu as déjà étudié la résolution d'une équation du second degré à une inconnue dans ℝ. Tu sais donc que cette équation peut avoir deux solutions ou une solution unique ou ne peut avoir aucune solution. Peux-tu trouver le nombre de racines (solutions) d'une équation du second degré sans la résoudre ?



Le discriminant

Les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$, a, b et c sont des nombres réels : $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Chacune des deux racines contient l'expression $\sqrt{b^2 - 4ac}$.

L'expression $b^2 - 4ac$ est appelée le discriminant de l'équation du second degré. Le calcul du discriminant permet de déterminer la nature des deux racines de l'équation.

Exemple

1 Détermine la nature des racines de chacune des équations suivantes :

A $5x^2 + x - 7 = 0$ **B** $x^2 - 2x + 1 = 0$

C $-x^2 + 5x - 30 = 0$

Solution

Pour déterminer la nature des deux racines :

A Dans l'équation $5x^2 + x - 7 = 0$ $a = 5$, $b = 1$, $c = -7$

Le discriminant $= b^2 - 4ac$

$= 1 - 4 \times 5 \times (-7) = 141$

∵ Puisque le discriminant est positif, l'équation a deux racines réelles différentes.

B Dans l'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$ $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$

Le discriminant $= b^2 - 4ac$

$= 4 - 4 \times 1 \times 1 = 0$

∵ Puisque le discriminant est nul, l'équation a deux racines réelles égales.

A apprendre

- Comment déterminer les racines d'une équation du second degré à une inconnue.

Expressions de base

- Racine
- Discriminant

Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique

C Dans l'équation $-x^2 + 5x - 30 = 0$ $a = -1$, $b = 5$, $c = -30$

Le discriminant = b^2 - ac

$= 25 - 4 \times (-1) \times (-30) = -95$

∵ Puisque le discriminant est négatif, l'équation a deux racines complexes.

Remarque que :

Le discriminant	Nombre de racines et leurs natures	Allure de la courbe
$b^2 - 4ac > 0$	**Deux racines réelles différentes**	
$b^2 - 4ac = 0$	**Une racine réelle double**	
$b^2 - 4ac < 0$	**Deux racines complexes**	

Essaie de résoudre

1 Détermine le nombre de racines de chacune des équations suivantes en précisant leurs natures :

A $6x^2 = 19x - 15$ **B** $12x - 4x^2 = 9$

C $x(x - 2) = 5$ **D** $x(x + 5) = 2(x - 7)$

Exemple

2 Démontre que les racines de l'équation $2x^2 - 3x + 2 = 0$ sont complexes, puis utilise la formule générale pour trouver ces deux racines.

Solution

Dans l'équation $2x^2 - 3x + 2 = 0$ **a = 2, b = - 3, c = 2**

∵ Le discriminant = $b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7$

∵ Puisque le discriminant est négatif , **l'équation a deux racines complexes**

La formule générale est $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{-7}}{2 \times 2} = \frac{3 \pm \sqrt{7}\, i}{4}$

Les deux racines de l'équation sont : $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4} i$, $\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4} i$

Réflexion critique : Dans l'ensemble des nombres complexes, les deux racines d'une équation du second degré sont-elles nécessairement deux nombres conjugués ? Justifie ta réponse par des exemples.

Essaie de résoudre

2 Démontre que les deux racines de l'équation $7x^2 - 11x + 5 = 0$, sont complexes, puis utilise la formule générale pour trouver ces deux racines.

Exemple

3 Si les racines de l'équation $x^2 + 2(k-1)x + 9 = 0$ sont égales, trouve la valeur de k, puis vérifie le résultat.

Solution

$b^2 - 4ac = 0$

$4(k-1)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$

$4k^2 - 8k - 32 = 0$

$k^2 - 2k - 8 = 0$

$(k-4)(k+2) = 0$

$k = 4$ ou $k = -2$

Vérification : si $k = 4$

L'équation est : $x^2 + 6x + 9 = 0$

Les racines de cette équation sont égales. Ce sont : -3 et -3

Vérification : Si $k = -2$

L'équation est : $x^2 - 6x + 9 = 0$

Les racines de cette équation sont égales. Ce sont 3 et 3.

Essaie de résoudre

3 Si les racines de l'équation $x^2 - 2kx + 7k - 6x + 9 = 0$ sont égales, trouve les valeurs réelles de k, puis trouve les deux racines.

Test de compréhension

1 **Lien avec la santé :** L'Organisation Mondiale de la Santé fait beaucoup d'efforts pour sensibiliser aux dangers de l'hépatite. Une étude dans l'un des pays faite durant plusieurs années, montre les résultats indiqués dans le tableau ci-contre. L'équation $y = -2{,}5n^2 - 7{,}5n + 945$ représente le nombre de contaminés où n est le nombre d'années après l'an 2005.

Année	Nombre de contaminés pour chaque 10000 personnes
2005	945
2007	920
2010	845
2014	
2020	

A Calcule le nombre de contaminés en 2014 et en 2020

B Utilise la formule générale pour trouver la valeur de n si $y = 495$

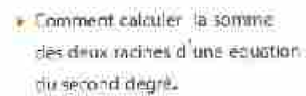
C Quand est-ce que le nombre de contaminés est égal à zéro ? Est-ce possible ? Justifie ta réponse.

D Utilise Internet pour chercher les causes de l'hépatite, les méthodes de prévention et les méthodes de soin.



1 - 4 Relation entre les racines d'une équation du second degré et les coefficients de ses termes

A apprendre



- Comment calculer la somme des deux racines d'une équation du second degré.
- Comment calculer le produit des deux racines d'une équation du second degré.
- Trouver une équation du second degré à partir d'une autre du second degré.

Expressions de base

- Somme des deux racines
- Produit des deux racines

Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique



On sait que les racines de l'équation $4x^2 - 8x + 3 = 0$ sont $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$.

La somme des racines $= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$

Le produit des deux racines $= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

Y a-t-il une relation entre la somme des racines d'une équation et les coefficients de ses termes ?

Y a-t-il une relation entre le produit des racines d'une équation et les coefficients de ses termes ?



La somme et le produit des deux racines

Les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont :

$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Si $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = L$ et $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = M$, alors :

$L + M = \frac{-b}{a}$ et $L\,M = \frac{c}{a}$ (à démontrer)

Expression orale : Dans l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, trouve la valeur de $L + M$ et $L\,M$ dans chacun des cas suivants :

A si $a = 1$ **B** si $b = a$ **C** si $a = c$

Exemple

1 Sans résoudre l'équation $2x^2 + 5x - 12 = 0$, trouve la somme et le produit de ses racines.

Solution

$a = 2$, $b = 5$, $c = -12$

La somme des racines $= \frac{-b}{a} = \frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}$

Le produit des racines $= \frac{c}{a} = \frac{-12}{2} = -6$

Essaie de résoudre

1) Sans résoudre l'équation, trouve la somme et le produit de ses racines dans chacun des cas suivants :

A $2x^2 + x - 6 = 0$ B $3x^2 = 23x - 30$ C $(2x - 3)(x + 2) = 0$

Exemple

2) Si le produit des racines de l'équation $2x^2 - 3x + k = 0$ est égal à 1, trouve la valeur de k, puis résous l'équation dans l'ensemble des nombres complexes.

Solution

Le produit des racines $= \frac{c}{a}$ $\therefore \frac{k}{2} = 1$ $\therefore k = 2$

a = 2, b = - 3, c = 2

La formule générale est : $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{7}\,i}{4}$$

L'ensemble solution est $\{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4} i \; ; \; \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4} i\}$

Essaie de résoudre

2) Si le produit des racines de l'équation $3x^2 + 10x - c = 0$ est égal à $\frac{-8}{3}$, trouve la valeur de c, puis résous l'équation.

3) Si la somme des racines de l'équation $2x^2 + bx - 5 = 0$ est égale à $-\frac{3}{2}$, trouve la valeur de b, puis résous l'équation.

Exemple

3) Si $(1 + i)$ est l'une des racines de l'équation $x^2 - 2x + k = 0$ où $k \in R^*$ trouve :

A l'autre racine B la valeur de k.

Solution

a = 1 , b = -2 , c = k

A $\because$ $1 + i$ est l'une des racines de l'équation

$\therefore$ l'autre racine $= 1 - i$ **car les deux racines sont conjuguées et leur somme est = 2**

B $\because$ Le produit des racines = k

$\therefore (1 + i)(1 - i) = k$

$\therefore 1 + 1 = k$

$\therefore k = 2$

Essaie de résoudre

4) Si $(2 + i)$ est l'une des racines de l'équation $x^2 - 4x + h = 0$, trouve

A) l'autre racine.

B) la valeur de h.



Former une équation du second degré en connaissant ses deux racines

Soient L et M les racines de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$

En divisant les deux membres de l'équation par a : $\therefore x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

D'où $x^2 - (\frac{-b}{a})x + \frac{c}{a} = 0$

$\because$ L et M sont les racines de l'équation et, $L + M = -\frac{b}{a}$ et $LM = \frac{c}{a}$

$\therefore$ **L'équation du second degré ayant pour racines L et M est :** $x^2 - (L + M)x + LM = 0$

Exemple

4) Forme l'équation du second degré dont les racines sont 4 et -3 .

Solution

Soient les deux racines L et M

$\because L + M = 4 + (-3) = 1$ et $LM = 4(-3) = -12$,

$\because$ **L'équation du second degré est de la forme :** $x^2 - (L + M)x + LM = 0$

$\therefore$ **L'équation est :** $x^2 - x - 12 = 0$

Exemple

5) Dans chacun des cas suivants, forme l'équation du second degré dont les racines sont : $\frac{-2+2i}{1+i}$ et $\frac{-2-4i}{2-i}$

Solution

Soient les deux racines L et M

$L = \frac{-2+2i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{4i}{2} = 2i$

$M = \frac{-2-4i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} = \frac{-10i}{5} = -2i$

$L + M = 2i - 2i = 0$

, $LM = 2i \times (-2i) = -4i^2 = 4$

$\because$ L'équation du second degré est de la forme : $x^2 + (L + M)x + LM = 0$

$\therefore$ L'équation est $x^2 + 4 = 0$

Essaie de résoudre

5) Dans chacun des cas suivants, forme l'équation du second degré dont les racines sont :

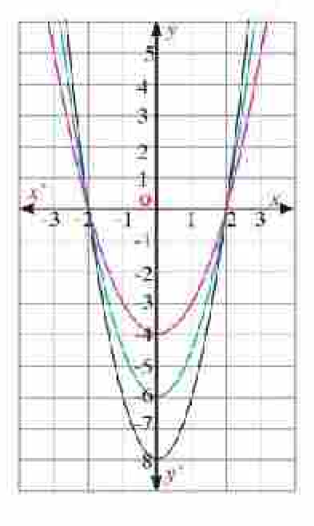
A) 3 et -5

B) -9 i et 9 i

C) $\frac{3}{i}$ et $\frac{3+3i}{1-i}$

Réflexion critique : La figure ci-contre, représente les courbes de plusieurs fonctions du second degré passant par les deux points (-2; 0) et (2; 0).

Trouve l'expression algébrique de chaque fonction.



Former une équation du second degré connaissant une autre du second degré :

Exemple

6 Si L et M sont les racines de l'équation $2x^2 - 3x - 1 = 0$, forme une équation du second degré dont les racines sont L^2 et M^2.

Solution

Dans l'équation donnée, a = 2, b = - 3 et c = -1: $L + M = -(\frac{-3}{2}) = \frac{3}{2}$ et $LM = (-\frac{1}{2})$

Dans l'équation demandée, on sait que $L + M = \frac{3}{2}$ et $LM = -\frac{1}{2}$

En utilisant la formule $L^2 + M^2 = (L + M)^2 - 2\,LM$

$\therefore L^2 + M^2 = (L + M)^2 - 2\,LM \quad = (\frac{3}{2})^2 - 2 \times (-\frac{1}{2})$

$= \frac{9}{4} + 1 = \frac{9}{4} + \frac{4}{4} = \frac{13}{4}$

$\because L^2M^2 = (LM)^2$

$\therefore L^2M^2 = (-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

Remarque que

$L^2 + M^2 = (L + M)^2 - 2LM$

L'équation demandée est x^2 – (somme des racines) x + produit des racines = 0

$x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{1}{4} = 0$ **En multipliant les deux membres de l'équation par 4**

$\therefore$ **L'équation demandée est :** $4x^2 - 13x + 4 = 0$

Essaie de résoudre

6 Dans l'équation précédente $2x^2 - 3x - 1 = 0$, forme une équation du second degré dont les racines sont :

A $\frac{1}{L}, \frac{1}{M}$ **B** $\frac{L}{M}, \frac{M}{L}$ **C** $L + M, LM$

Test de compréhension

1 Dans chacun des cas suivants, forme une équation du second degré dont les racines sont :

A $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{3}$ **B** $5\sqrt{3}$ et $-2\sqrt{3}$ **C** $3 + \sqrt{2}\,i$ et $3 - \sqrt{2}\,i$

2 Si L et M sont les racines de l'équation $x^2 + 3x - 5 = 0$, forme une équation du second degré dont les racines sont L^3 et M^3.

1 - 5 Signe d'une fonction

A apprendre

- Étude du signe d'une fonction : constante - du premier degré - du second degré



Tu as déjà étudié la représentation graphique d'une fonction du premier degré et d'une fonction du second degré. Tu as identifié l'allure de leurs courbes représentatives. Peux-tu trouver le signe de chacune de ses fonctions ?

Détermine le signe d'une fonction consiste à déterminer les valeurs de x pour lesquelles :

f(x) est **positive** c'est-à-dire $f(x) > 0$

f(x) est **négative** c'est-à-dire $f(x) < 0$

f(x) est **nulle** c'est-à-dire $f(x) = 0$



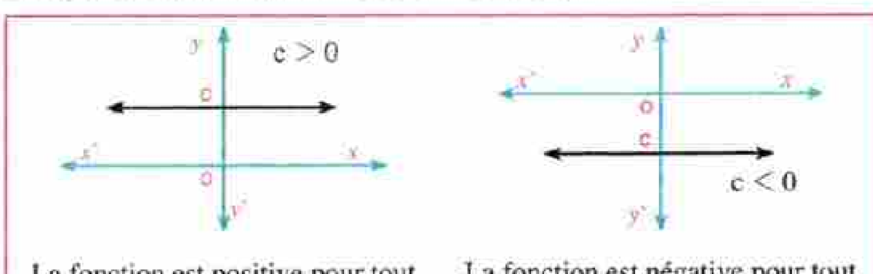
Expressions de base

- Signe d'une fonction
- Fonction constante
- Fonction affine (du premier degré)
- Fonction du second degré

(1) Signe d'une fonction constante

Le signe d'une fonction constante f telle que $f(x) = c$ $(c \neq 0)$ est le même signe que celui de c pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La figure suivante montre le signe de la fonction f.



La fonction est positive pour tout $x \in \mathbb{R}$ | La fonction est négative pour tout $x \in \mathbb{R}$

Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique



1 Détermine le signe de chacune des fonctions suivantes :

A f(x) = 5 **B** f(x) = -7

Solution

A $\because f(x) > 0$ $\therefore$ la fonction est positive pour tout $x \in \mathbb{R}$

B $\because f(x) < 0$ $\therefore$ la fonction est négative pour tout $x \in \mathbb{R}$

Essaie de résoudre



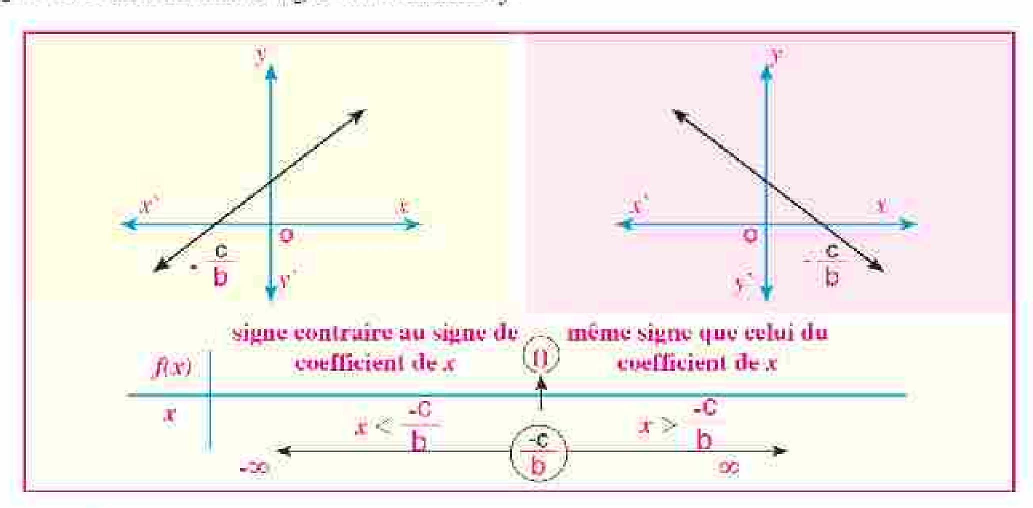
1 Détermine le signe de chacune des fonctions suivantes :

A $f(x) = -\frac{2}{3}$ **B** $f(x) = \frac{5}{2}$

(2) Signe d'une fonction du premier degré (fonction affine) :

L'expression algébrique de la fonction f est $f(x) = bx + c$, $b \neq 0$, $x = -\frac{c}{b}$, si $f(x) = 0$

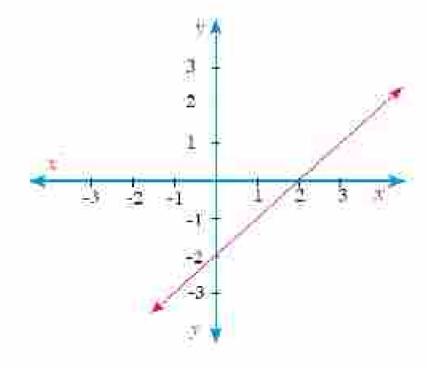
La figure suivante montre le signe de la fonction f



Exemple

2 Détermine le signe de la fonction $f(x) = x - 2$ en illustrant la réponse graphiquement :

Solution



L'expression algébrique de la fonction : $f(x) = x - 2$

Le graphique de la fonction :

Pour tracer la courbe

Si $f(x) = 0$, alors $x = 2$

Si $x = 0$, alors $f(x) = -2$



Du graphique, on trouve que :

- la fonction est positive si $x > 2$
- la fonction est nulle si $x = 2$
- la fonction est négative si $x < 2$

Essaie de résoudre

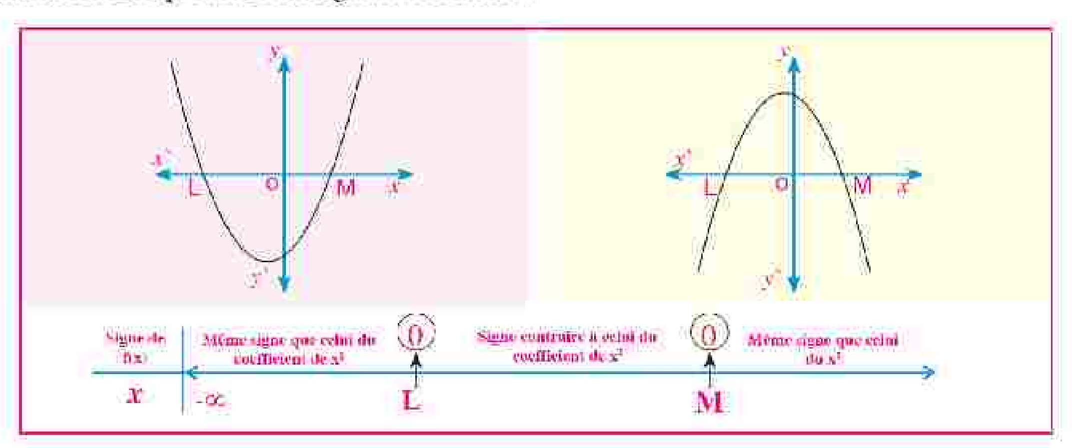
2 Détermine le signe de la fonction $f(x) = -2x - 4$ en illustrant la réponse graphiquement.

(3) Signe d'une fonction du second degré :

Pour déterminer le signe d'une fonction f du second degré telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

on calcule le discriminant de la fonction $ax^2 + bx + c = 0$:

(1) Si $b^2 - 4ac > 0$ l'équation a deux racines réelles L et M . En supposant que L < M , le signe de la fonction est indiqué dans les figures suivantes :



Exemple

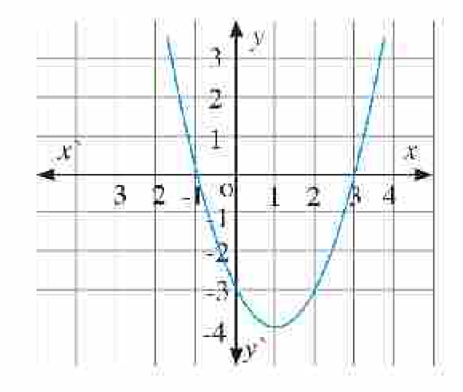
3 Représente graphiquement la fonction f telle que $f(x) = x^2 - 2x - 3$, puis détermine son signe.

Solution

En factorisant l'équation : $x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0$

Les racines de l'équation sont : 1 et 3



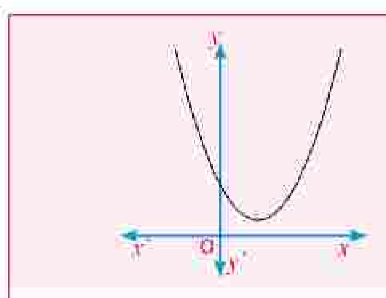
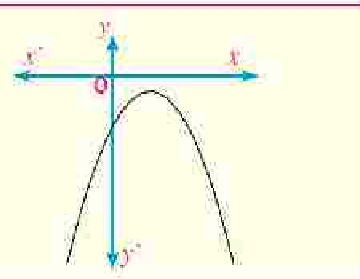
Du graphique, on trouve que :

- $f(x) > 0$ si $x \in \mathbb{R} - [-1, 3]$
- $f(x) < 0$ si $x \in]-1, 3[$
- $f(x) = 0$ si $x \in \{-1, 3\}$

Essaie de résoudre

3 Représente graphiquement la fonction f telle que $f(x) = x^2 - x + 6$, puis détermine son signe.

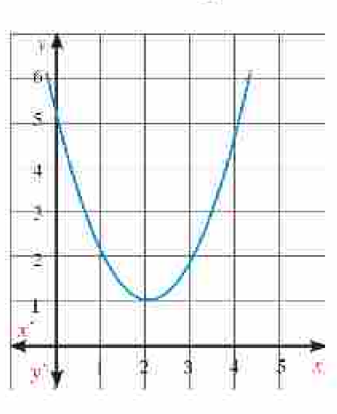
(2) Si $b^2 - 4ac < 0$, l'équation n'a pas de racines réelles. Dans ce cas, la fonction f a le même signe que celui du coefficient de x^2, comme l'indique la figure suivante :

	
Si $a > 0$, $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$	Si $a < 0$, $f(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Exemple

4 Représente graphiquement la fonction f telle que $f(x) = x^2 - 4x + 5$, puis détermine son signe.

Solution



Le discriminant est $(b^2 - 4\,ac) = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5$

$$= 16 - 20 = -4 < 0$$

la fonction $x^2 - 4x + 5 = 0$, n'a pas de racines réelles

la fonction est positive pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car le coefficient de $x^2 > 0$)

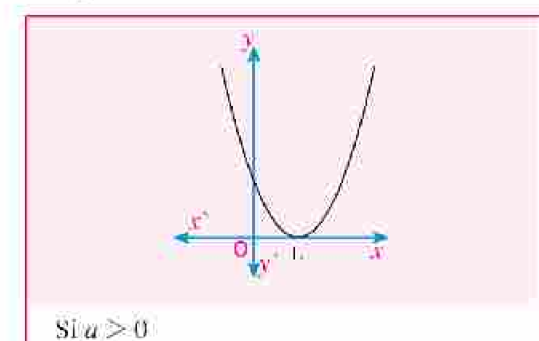
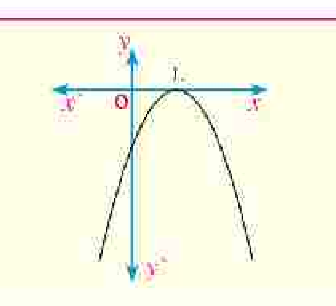
Essaie de résoudre

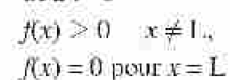
4 Représente graphiquement la fonction f, telle que $f(x) = -x^2 - 2x - 4$, puis détermine son signe.

(3) Si $b^2 - 4ac = 0$ l'équation a une racine double. Soit L cette racine. Dans ce cas, le signe de la fonction est comme suit :

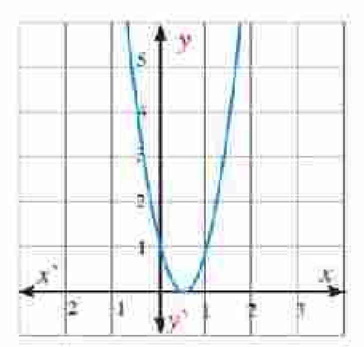
➢ Si $x \neq$ L la fonction a le même signe que celui de a. ➢ Si $f(x) = 0$ si $x =$ L

La figure suivante illustre ce cas :

	
Si $a > 0$ $f(x) > 0$ $x \neq$ L, $f(x) = 0$ pour $x =$ L	Si $a < 0$ $f(x) < 0$ $x \neq$ L, $f(x) = 0$ pour $x =$ L



Exemple



(5) Représente graphiquement la fonction f telle que $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$, puis détermine son signe.

Solution

Le discriminant est $(b^2 - 4ac) = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1$
$= 16 - 16 = 0$

la fonction $4x^2 - 4x + 1 = 0$ a une racine double.

En factorisant : $(2x - 1)^2 = 0$

Si : $2x - 1 = 0$, alors $x = \frac{1}{2}$

$f(x) > 0$ pour $x \neq \frac{1}{2}$, $f(x) = 0$ pour $x = \frac{1}{2}$

Essaie de résoudre

(5) Représente graphiquement la fonction f, telle que $f(x) = -4x^2 - 12x - 9$, puis détermine son signe

Exemple

(6) Démontre que pour toute valeur de $x \in \mathbb{R}$, les racines de l'équation $2x^2 - kx + k - 3 = 0$ sont réelles différentes.

Solution

Le discriminant $(b^2 - 4ac) = (-k)^2 - 4 \times 2 \times (k - 3) = k^2 - 8k + 24$

Les deux racines sont réelles différentes si le discriminant est positif.

On étudie le signe de la fonction $y = k^2 - 8k + 24$

Le discriminant de l'équation $k^2 - 8k + 24 = 0$ est :

$(-8)^2 - 4 \times 1 \times 24 = 64 - 96 = -32 < 0$

Donc l'équation $k^2 - 8k + 24 = 0$ n'a pas de racines réelles.

$\therefore$ La fonction $y = k^2 - 8k + 24$ est positive pour tout $x \in \mathbb{R}$ (Pourquoi ?)

Donc le discriminant de l'équation $2x^2 - kx + k - 3 = 0$ est positif pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ Les racines de l'équation $2x^2 - kx + k - 3 = 0$ sont réelles différentes.

Test de compréhension

(1) Détermine le signe de chacune des fonctions suivantes :

A $f(x) = 2x - 3$ **B** $f(x) = 4 - x$ **C** $f(x) = x^2 - 4$

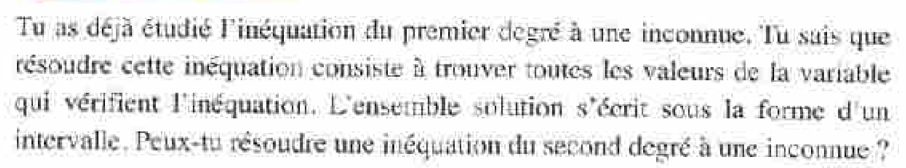
D $f(x) = 1 - x^2$ **E** $f(x) = 4 + 4x + x^2$ **F** $f(x) = 3x - 2x^2 + 4$

Inéquation du second degré 1 - 6

L'inéquation du second degré à une inconnue :



Tu as déjà étudié l'inéquation du premier degré à une inconnue. Tu sais que résoudre cette inéquation consiste à trouver toutes les valeurs de la variable qui vérifient l'inéquation. L'ensemble solution s'écrit sous la forme d'un intervalle. Peux-tu résoudre une inéquation du second degré à une inconnue ?

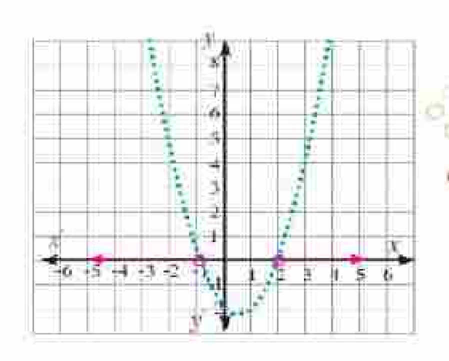


Remarque que :

$x^2 - x - 2 > 0$ est une inéquation du second degré tandis que $f(x) = x^2 - x - 2$ est la fonction du second degré correspondante à cette inéquation.

La figure ci-contre montre que :

- L'ensemble solution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2 - x - 2 > 0$ est $]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$
- L'ensemble solution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2 - x - 2 < 0$ est $]-1, 2[$



A apprendre

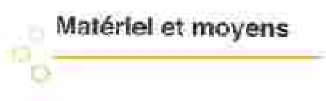
- Résolution de l'inéquation du second degré à une inconnue

Expressions de base

- Inéquation



Résolution d'une inéquation du second degré à une inconnue



Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique



(1) Résous l'inéquation : $x^2 - 5x - 6 > 0$



Pour résoudre l'inéquation, on suit les étapes suivantes :

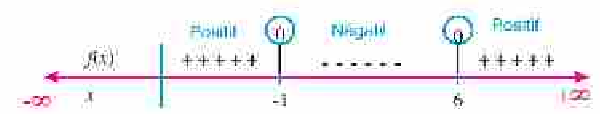
Étape (1) : On écrit la fonction du second degré correspondante à l'inéquation. La fonction est

$f(x) = x^2 - 5x - 6$

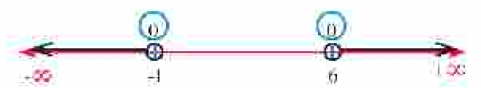
Étape (2): On étudie le signe de la fonction f telle que $f(x) = x^2 - 5x - 6$, puis on l'illustre sur la droite numérique en posant $f(x) = 0$

$x^2 - 5x - 6 = 0$ $\therefore (x - 6)(x + 1) = 0$

$x = 6$ ou $x = -1$



Étape (3): On détermine les intervalles qui vérifient l'inéquation $x^2 - 5x - 6 > 0$



Donc l'ensemble solution est : $]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$

Essaie de résoudre

1 Résous chacune des inéquations suivantes :

A $x^2 + 2x - 8 > 0$ **B** $x^2 + x + 12 > 0$

Exemple

2 Résous l'inéquation : $(x + 3)^2 \leqslant 10 - 3(x + 3)$.

Solution

★ $\because (x + 3)^2 \leqslant 10 - 3(x + 3)$

$\therefore x^2 + 6x + 9 \leqslant 10 - 3x - 9$

$\therefore x^2 + 9x + 8 \leqslant 0$

L'équation correspondante est : $x^2 + 9x + 8 = 0$

En factorisant : $(x + 8)(x + 1) = 0$

L'ensemble solution de l'équation est : $\{-8, -1\}$

★ La droite numérique suivante illustre le signe de la fonction $f(x) = x^2 + 9x + 8$



Donc l'ensemble solution de l'inéquation est : $[-8, -1]$

Essaie de résoudre

2 Résous chacune des inéquations suivantes :

A $5x^2 + 12x \geqslant 44$

B $(x + 3)^2 + 3(x + 3) - 10 \geqslant 0$

Test de compréhension

1 Quelle est la différence entre une équation du second degré à une inconnue et une inéquation du second degré à une inconnue ?

2 Quelle est la relation entre la recherche du signe d'une fonction du second degré à une inconnue et la résolution de l'inéquation du second degré à une inconnue ?

3 Déceler l'erreur : Trouve l'ensemble solution de l'inéquation $(x + 1)^2 < 4(2x - 1)^2$

La solution de Youssef

$\because (x + 1)^2 < 4(2x - 1)^2$

$\therefore x + 1 < 2(2x - 1)$ en calculant les racines des deux membres

$\therefore -4x + x + 2 + 1 < 0$

$\therefore -3x + 3 < 0$

L'équation correspondante à l'inégalité est :

$-3x + 3 = 0$

L'ensemble solution est $\{1\}$

$-\infty$ + + + ⓪ - - - $f(x)$ $+\infty$; 1 ; x

★ Recherche du signe de la fonction f telle que $f(x) = -3x + 3$

L'ensemble solution de l'inéquation $]1\ , +\infty[$

La solution de Nour

$\because (x + 1)^2 < 4(2x - 1)^2$

$\therefore x^2 + 2x + 1 < 16x^2 - 16x + 4$

$\therefore 15x^2 - 18x + 3 > 0$

L'équation correspondante à l'inégalité est :

$\therefore 3(5x - 1)(x - 1) = 0$

L'ensemble solution est $\{1, \frac{1}{5}\}$

$-\infty$ + + + ⓪ - - - - ⓪ + + + $f(x)$ $+\infty$; $\frac{1}{5}$; 1 ; x

★ Recherche du signe de la fonction f telle que $f(x) = 15x^2 - 18x + 3$

L'ensemble solution de l'inéquation

$\mathbb{R} - [\frac{1}{5}, 1]$

Résumé de l'unité

1 Résolution de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$.

Méthode
Factoriser
Compléter le carré parfait
Utiliser la formule générale
Représenter graphiquement

2 Détermination de la nature des racines de l'équation du second degré :

$(b^2 - 4ac)$ est appelé le discriminant de l'équation du second degré. Ce discriminant indique la nature et le nombre de racines de l'équation comme suit :

- ★ Si $b^2 - 4ac > 0$ l'équation admet deux racines réelles différentes
- ★ Si $b^2 - 4ac = 0$ l'équation admet une racine réelle double .
- ★ Si $b^2 - 4ac < 0$ l'équation admet deux racines complexes.

3 Le nombre complexe :

Tout nombre qu'on peut écrire sous la forme $a + b\,i$, où a et b sont deux nombres réels et $i^2 = -1$ est un nombre complexe. bi est la partie imaginaire du nombre. Le tableau suivant montre les puissances entières de i où $n \in z$:

i^{4n+1}	i^{4n+2}	i^{4n+3}	i^{4n}
i	-1	$-i$	1

Égalité de deux nombres complexes : Si $a + b\,i = c + d\,i$, alors a = c et b = d et réciproquement

Propriétés des opérations : On peut utiliser les propriétés de la commutativité, de l'associativité et de la distributivité pour l'addition et la multiplication des nombres complexes. Pour additionner et soustraire les nombres complexes, on additionne les parties réelles pour trouver la partie réelle du résultat et les parties imaginaires pour trouver la partie imaginaire du résultat.

Deux nombres conjuguées : Les deux nombres $a + b\,i$ et $a - b\,i$ sont appelés deux nombres conjugués. La somme de deux nombres conjugués est un nombre réel et leur produit est aussi un nombre réel.

Résumé de l'unité

④ Somme et produit des racines d'une équation du second degré :

Si L et M sont les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$, alors L et M : donc $L + M = \frac{-b}{A}$ et $LM = \frac{c}{a}$

⑤ Former une équation du second degré connaissant ses racines :

Si L et M sont les racines d'une équation du second degré , alors l'équation peut s'écrire sous la forme :

★ $(x - L)(x - M) = 0$

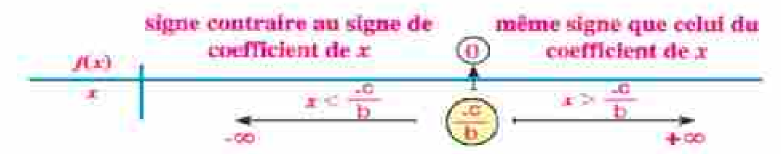
★ Si $L + M = -\frac{b}{a}$ et $LM = \frac{c}{a}$, alors l'équation est $x^2 - (L + M)x + LM = 0$

⑥ Recherche du signe d'une fonction :

★ Le signe d'une fonction constante f telle que $f(x) = c$ $(c \neq 0)$ est le même signe que celui de c pour tout $x \in \mathbb{R}$.

★ L'expression algébrique de la fonction f est $f(x) = bx + c$ où $b \neq 0$

Si $f(x) = 0$, alors $x = -\frac{c}{b}$. La figure suivante montre le signe de la fonction f :



★ Pour déterminer le signe d'une fonction f, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ on calcule le discriminant.

★ Si $b^2 - 4ac > 0$, le signe de la fonction f est déterminé selon la figure suivante :



★ Si $b^2 - 4ac = 0$, l'équation a une racine double. Soit L cette racine. Dans ce cas, le signe de la fonction est comme suit :

Si $x \neq L$, la fonction a le même signe que celui de a.

Si $x = L$, $f(x) = 0$

★ Si $b^2 - 4ac < 0$ l'équation n'a pas de racines réelles. Dans ce cas, la fonction f a le même signe que celui du coefficient de x^2.

⑦ Résolution d'une inéquation du second degré à une inconnue :

Pour résoudre une inéquation du second degré, on suit les étapes suivantes :

1- On écrit la fonction du second degré $y = f(x)$ correspondante à l'inéquation.

2- On étudie le signe de la fonction f, puis on l'illustre sur la droite numérique.

3- On détermine l'ensemble solution suivant les intervalles qui le vérifient

Géométrie

Unité 2

Similitude



Objectifs de l'unité

Après l'étude de l'unité, l'élève devra être capable de :

- Se rappeler de tout ce qu'il a déjà étudié dans le cycle préparatoire concernant la similitude
- Identifier la similitude de deux polygones
- Identifier et démontrer le théorème d'énoncé « Si les longueurs des côtés correspondants de deux triangles sont proportionnelles, alors ces deux triangles sont semblables »
- Identifier et démontrer le théorème d'énoncé « Si deux triangles ont deux paires de côtés de longueurs proportionnelles et si les angles compris entre ces deux côtés ont même mesure, alors les deux triangles sont semblables ».
- Identifier et démontrer le théorème d'énoncé « Le rapport entre les aires de deux triangles semblables est égal à ...... ».
- Identifier et démontrer le corollaire d'énoncé « Deux polygones semblables peuvent être partagés en ...... »
- Identifier et démontrer le théorème d'énoncé « Le rapport entre les aires de deux polygones semblables est égal à ...... »
- Identifier et démontrer le corollaire d'énoncé « Deux droites contenant respectivement deux cordes d'un cercle se coupent en un point ...... », sa réciproque et ses corollaires.

Expressions de base

- Rapport
- Proportion
- Mesure d'angle
- Longueur
- Aire
- Produit en croix
- Extrême
- Moyen
- Polygones semblables
- Triangles semblables
- Côtés correspondants
- Angles superposables
- Polygone régulier
- Quadrilatère
- Pentagone
- Axiome
- Périmètre
- Aire d'un polygone
- Corde
- Sécante
- Tangente
- Diamètre
- Tangente commune extérieure
- Tangente commune intérieure
- Cercles concentriques
- Rapport de similitude



Leçons de l'unité

Leçon (2 - 1): Similitude des polygones

Leçon (2 - 2): Similitude des triangles

Leçon (2 - 3): Relation entre les aires de deux polygones semblables

Leçon (2 - 4): Application de la similitude dans le cercle

Matériel utilisé

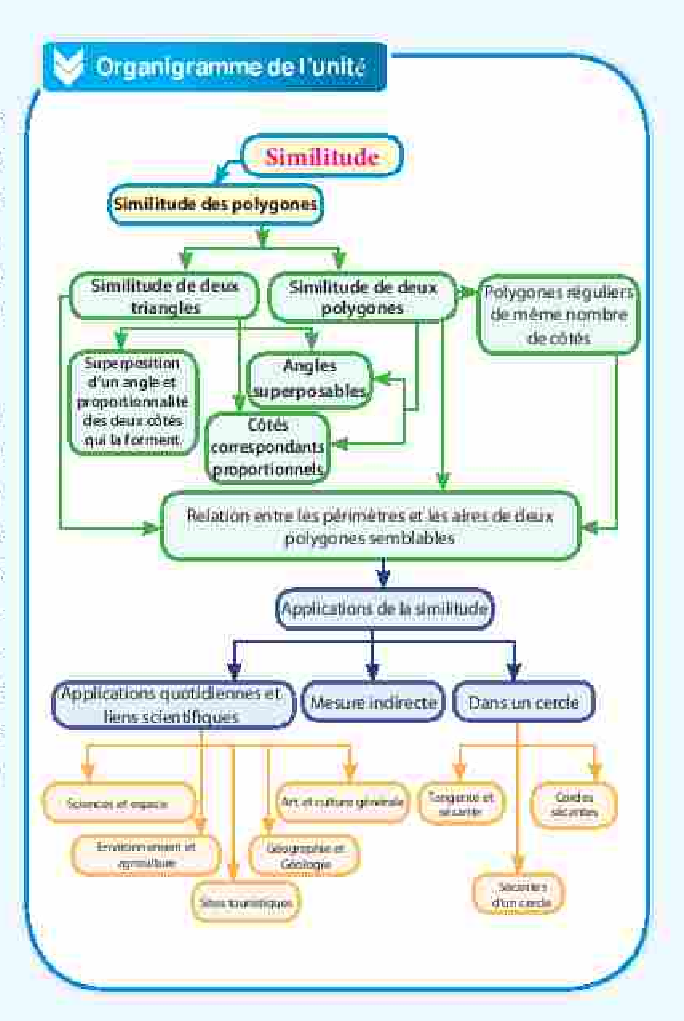
Ordinateur – Vidéo projecteur – Logiciels – Papiers quadrillés – Miroir – Instruments de mesure – Calculatrice

Historique

Pour construire un bâtiment sur un terrain, nous avons besoin de faire un plan de ce bâtiment et comme il est évident qu'on ne peut pas exécuter ce plan sur un papier qui a la dimension du terrain, on a recours à un modèle réduit de la construction en utilisant une échelle et des mesures d'angles analogues à leurs correspondants en réalité.

Si tu observes la figure en haut de la page, tu remarques que la nature contient des modèles qui se reproduisent de différentes grandeurs, par exemple : les feuilles d'arbres, le chou-fleur, les sinuosités du bord de la mer. L'observation de ces motifs récurrents a provoqué l'apparition d'une nouvelle géométrie depuis 40 ans environ. Cette géométrie qu'on appelle géométrie fractale et que tu étudieras plus tard, s'intéresse à l'étude des figures symétriques qui se reproduisent irrégulièrement.

Organigramme de l'unité

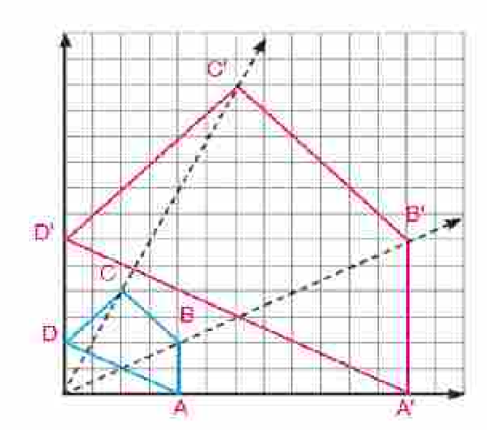


2 - 1 Similitude des polygones

A apprendre

- Notion de la similitude.
- Similitude des polygones.
- Echelle.
- Rectangle d'or et rapport d'or.





La figure ci-contre illustre un polygone ABCD et son image A'B'C'D' par une transformation géométrique.

A Compare les mesures des angles correspondants :
∠A, ∠A' - ∠B, ∠B'
∠C, ∠C' - ∠D, ∠D'
Que remarques-tu ?

B Calcule le rapport entre les longueurs des côtés correspondants $\frac{A'B'}{AB}$, $\frac{B'C'}{BC}$, $\frac{C'D'}{CD}$ et $\frac{D'A'}{DA}$. Que remarques-tu ?

Les polygones ayant la même forme, sont appelés des polygones semblables même si leurs côtés correspondants ne sont pas de même longueur.

Expressions de base

- Polygones semblables
- Triangles semblables
- Côtés correspondants
- Angles superposables
- Polygone régulier
- Quadrilatère
- Pentagone
- Rapport de similitude

Polygones semblables



Deux polygones ayant le même nombre de côtés sont semblables si leurs angles correspondants sont superposables et leurs côtés correspondants ont des longueurs proportionnelles.

Remarque que :

1- Dans la figure précédente, on a :

A **les angles correspondants sont superposables :**

∠A' ≡ ∠A , ∠B' ≡ ∠B
∠C' ≡ ∠C , ∠D' ≡ ∠D

B **les côtés correspondants ont des longueurs proportionnelles :**

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA}$$

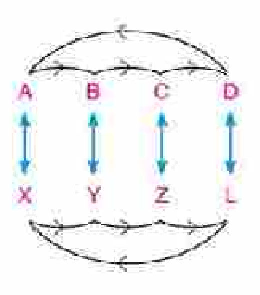
C'est pour cela qu'on peut dire que les deux figures ABCD et A'B'C'D' sont semblables.

2- On utilise le symbole (~) pour exprimer la similitude de deux polygones et on écrit leurs noms en respectant l'ordre des sommets correspondants pour faciliter la recherche des côtés correspondants.

Matériel et moyens

- Ordinateur
- Vidéo projecteur
- Logiciels
- Papiers quadrillés
- Instruments de mesure
- Calculatrice

Si polygone ABCD ~ polygone XYZL , alors :



A $\angle A \equiv \angle X$, $\angle B \equiv \angle Y$, $\angle C \equiv \angle Z$, $\angle D \equiv \angle L$

B $\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CD}{ZL} = \frac{DA}{LX} = K$ (rapport de similitude) où $K \neq 0$

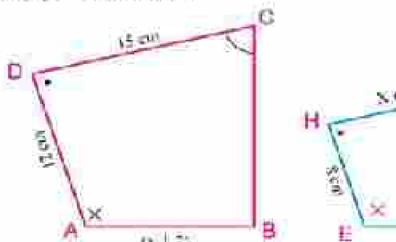
Dans ce cas, le rapport de similitude du polygone ABCD au polygone XYZL = K et le rapport de similitude du polygone XYZL au polygone ABCD = $\frac{1}{K}$

Exemple

1 **Dans la figure ci-contre,** polygone ABCD ~ polygone EFGH.

A Trouve le rapport de similitude du polygone ABCD au polygone EFGH

B Trouve la valeur de x et y.



Solution

∵ polygone ABCD ~ polygone EFGH

donc: $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE}$ = le rapport de similitude,

$$\frac{y+2}{6} = \frac{BC}{FG} = \frac{15}{x} = \frac{12}{8}$$

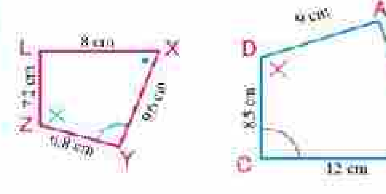
A Le coefficient de proportionnalité $= \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

B $\frac{15}{x} = \frac{3}{2} \longrightarrow x = 10\text{cm}$, $\frac{y+2}{6} = \frac{3}{2} \longrightarrow y = 7\text{cm}$

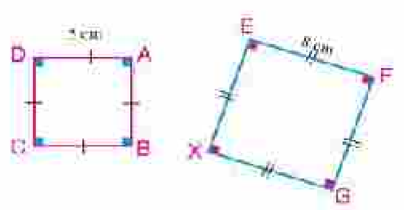
Essaie de résoudre

1 Lesquelles des pairs de polygones suivants sont semblables ? Écris les polygones semblables en ordonnant les sommets correspondants puis détermine le coefficient de la similtude :

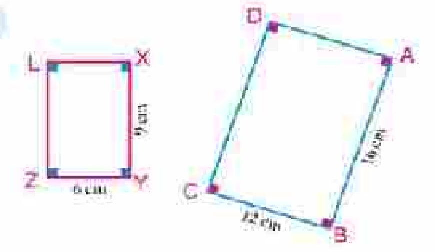
A



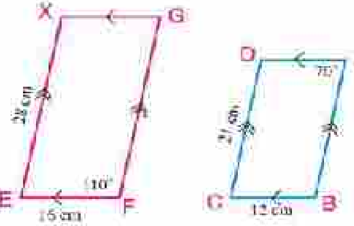
B



C



D

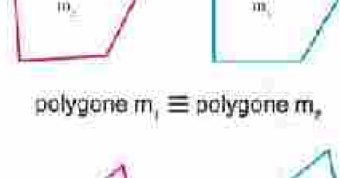


Réfléchis

Tous les carrés sont-ils semblables ? Tous les losanges sont-ils semblables ?

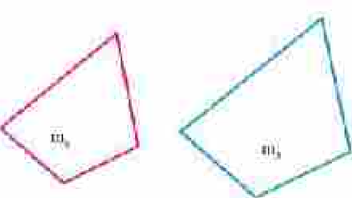
Tous les rectangles sont-ils semblables ? Tous les parallélogrammes sont-ils semblables ?

Exeplique ta réponse



polygone $m_1 \equiv$ polygone m_2

1- Pour que deux polygones soient semblables, les deux conditions doivent être vérifiées simultanément. Une seule condition ne suffit pas.



polygone $m_3 \sim$ polygone m_4

2- Deux polygones superposables sont semblables car les deux conditions de la similitude sont vérifiées. Dans ce cas, le rapport de similitude est égal à 1 mais deux polygones semblables ne sont pas nécessairement superposables comme le montre la figure ci-contre.

3- Deux polygones semblables à un même troisième sont semblables.

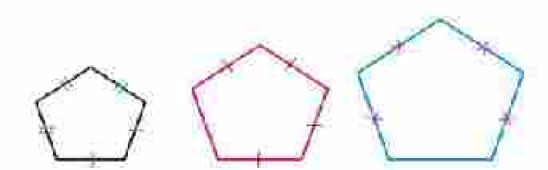
Si polygone $M_1 \sim$ polygone M_3

et polygone $M_2 \sim$ polygone M_3

alors polygone $M_1 \sim$ polygone M_2



4- Tous les polygones réguliers ayant le même nombre de côtés sont semblables. Pourquoi ?

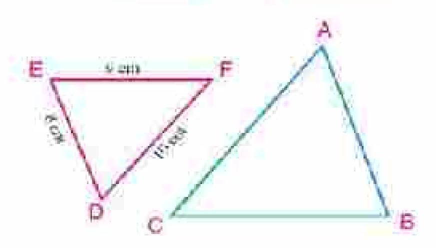


Exemple

(2) Dans la figure ci-contre, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$,

$DE = 8cm$, $EF = 9cm$, $FD = 10cm$

Si le périmètre du triangle $ABC = 81$ cm, calc les longueurs des côtés du triangle ABC



Solution

$\because \triangle ABC \sim \triangle DEF$

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{AB + BC + CA}{AE + EF + FD} = \frac{\text{Périmètre de } \triangle ABC}{\text{Périmètre de } \triangle DEF}$ (propriété de la proportionnalité)

Donc $\frac{AB}{8} = \frac{BC}{9} = \frac{CA}{10} = \frac{81}{27}$

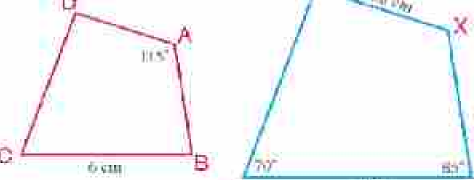
$\therefore AB = 8 \times \frac{81}{27} = 24cm$, $BC = 9 \times 3 = 27$, $CA = 10 \times 3 = 30cm$

Remarque que :

Si polygone $P_1 \sim$ polygone P_2, alors $\frac{\text{Périmètre du Ploygone } P_1}{\text{Périmètre du Ploygone } P_2}$ = Rapport de similitude

Essaie de résoudre

2 **Dans la figure ci-contre,**
polygone ABCD ~ polygone XYZL



A Calcule m ($\angle$ XLZ) et la longueur de $\overline{AD}$

B Si le périmètre du polygone ABCD = 19,5 cm , calcule le périmètre du polygone XYZL.

Exemple

3 ABCD est un rectangle tel que AB = 5 cm et BC = 8 cm. Trouve les dimensions d'un autre rectangle qui lui est semblable sachant que :

A le rapport de similitude = 1,4 **B** le rapport de similitude = 0,6

Solution

Supposons que Rectangle XYZL ~ Rectangle ABCD
Donc :



$$\frac{XY}{AB} = \frac{YZ}{BC} = \frac{ZL}{CD} = \frac{LX}{DA} = \text{Rapport de similitude}$$

A Si le rapport de similitude = 1,4

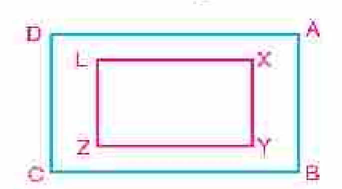
$$\frac{XY}{5} = \frac{YZ}{8} = 1{,}4$$

$\therefore$ XY = 7cm et YZ = 8,4cm

Remarque que: Le rectangle XYZL est un agrandissement du rectangle ABCD



B Si le rapport de similitude = 0,6



$$\frac{XY}{5} = \frac{YZ}{8} = 0{,}6$$

$\therefore$ XY = 3cm et YZ = 4,8 cm

Remarque que: Le rectangle XYZL est une réduction du rectangle ABCD.

Rapport de similitude de deux polygones

Soit k le rapport de similitude du polygone P_1 au polygone P_2.

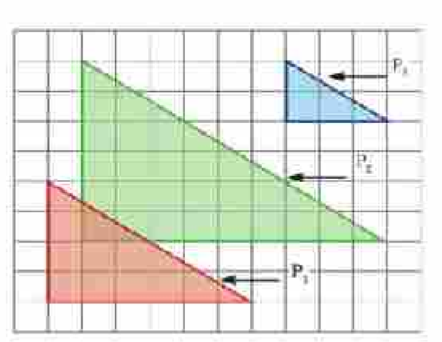
Si $k > 1$ le polygone P_1 est un agrandissement du polygone P_2.

Si $0 < k < 1$ le polygone P_1 est une réduction du polygone P_2.

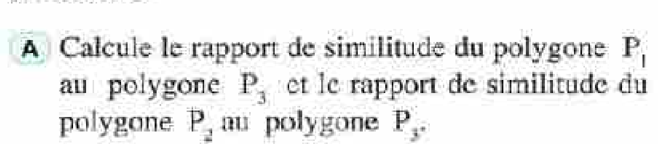
Si $k = 1$ le polygone P_1 se superpose au polygone P_2.

D'une manière générale, on peut utiliser le rapport de similitude pour calculer des dimensions dans des figures semblables.

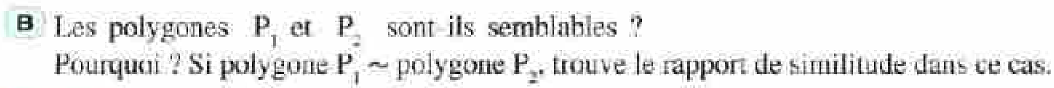
Exemple



④ **Dans la figure ci-contre,** les polygones P_1 et P_3 sont semblables et les polygones P_2 et P_3 sont semblables.



A Calcule le rapport de similitude du polygone P_1 au polygone P_3 et le rapport de similitude du polygone P_2 au polygone P_3.



B Les polygones P_1 et P_2 sont-ils semblables ? Pourquoi ? Si polygone $P_1 \sim$ polygone P_2, trouve le rapport de similitude dans ce cas.

Solution

A Rapport de similitude du polygone P_1 au polygone $P_3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Rapport de similitude du polygone P_2 au polygone $P_3 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

B $\because$ polygone $P_1 \sim$ polygone P_3 et polygone $P_2 \sim$ polygone P_3

$\therefore$ polygone $P_1 \sim$ polygone P_2

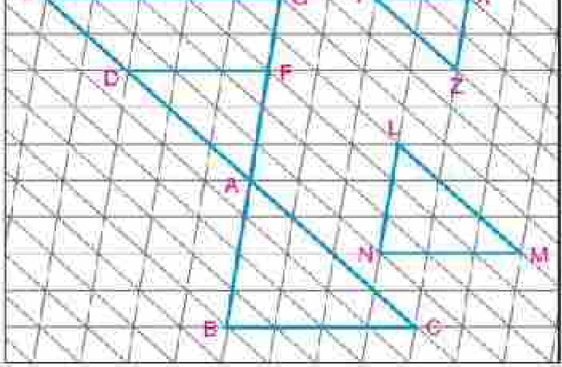
Donc le rapport de similitude du polygone P_1 au polygone $P_2 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Essaie de résoudre

③ Une photo rectangulaire a pour dimensions 10 cm et 15 cm. Trouve les dimensions et l'aire d'une autre photo qui lui est semblable sachant que le rapport de similitude est 2,4.

④ La figure ci-contre, montre un papier triangulé. Calcule le rapport de similitude et détermine si ce rapport induit un agrandissement, une réduction ou une superposition des figures dans chacun des cas suivants :





A △ LMN ~ △ ACB

B △ LMN ~ △ ZXY

C △ ADF ~ △ LMN

D △ EGA ~ △ CBA

E △ XYZ ~ △ BCA

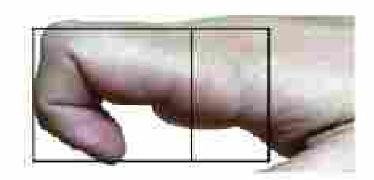
Activité

Le rapport d'or



Récemment, nous voyons dans le marché, des écrans d'ordinateurs de téléviseurs dont le rapport entre la longueur et la largeur est proche de 16 : 9 au lieu de 4 : 3. Il y a eu plus de demandes de ce type d'écrans car il offre un confort à l'œil. Ces dimensions sont proches des dimensions du rectangle d'or.

Le rectangle d'or



C'est un rectangle dont la longueur est inférieure au double de la largeur et qu'on peut partager en un carré et un rectangle semblable au rectangle d'origine.

Le rapport entre la longueur du rectangle d'or et sa largeur est appelé le rapport d'or.

Pour calculer le rapport d'or on considère que la longueur du rectangle d'or ABCD est x et sa largeur est une unité de longueur. En traçant le carré AFED, on obtient:

rectangle ABCD ~ rectangle EFBC

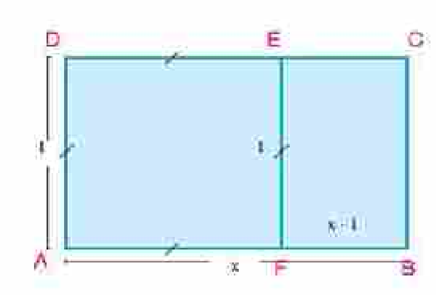
$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FB} \longrightarrow \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$

$\therefore x^2 - x - 1 = 0$

En résolvant l'équation du second degré on trouve que :

$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618$

$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ refusé



Le rapport d'or est environ 1,618 : 1

Certains artistes ont utilisé le rectangle d'or dans leurs œuvres artistiques. Le peintre célèbre Léonard de Vinci (1452 – 1519) a peint le tableau « Mona Lisa » ou « La Joconde » et Fibonacci (1170 – 1250) a posé la suite célèbre (1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; ......) dont le premier terme est 1, le deuxième terme est 1 et tout autre terme est obtenu en additionnant les deux termes qui le précèdent.

A Complète la suite jusqu'au dixième terme.

B Compare les rapports $\frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, ...$ puis compare-les avec le rapport d'or. Que remarques-tu ?

Essaie de résoudre

5 **A** Si les dimensions d'un rectangle sont 7,42 cm et 12 cm, ce rectangle est-il proche du rectangle d'or ?

B Quel est, à un centimètre près, la longueur du rectangle d'or ayant pour largeur 5 cm?

C Quel est, à un centimètre près, la largeur du rectangle d'or ayant pour longueur 194 cm?

D Tous les rectangles d'or sont-il semblables? Explique ta réponse.

Test de compréhension

Applications à la vie quotidienne **Dans la figure ci-contre,** si la taille de l'homme est 1,8 mètres, estime la hauteur de : l'arbre, le lampadaire, le bâtiment et la voiture, puis explique comment peux-tu vérifier ton estimation.



2 - 2 Similitude des triangles

A apprendre

- Cas de similitude de triangles.
- Propriétés de la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit dans un triangle rectangle

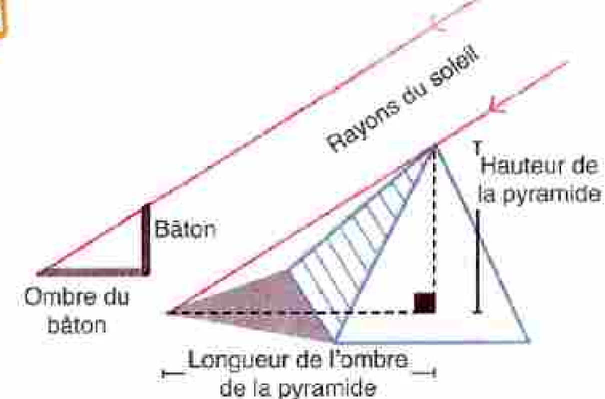
Expressions de bas

- Corollaire

Matériel et moyens

- Ordinateur
- Vidéo projecteur
- Logiciels de dessin
- Papiers quadrillés
- Miroir plat
- Instruments de mesure
- Calculatrice





Le Pharaon a demandé au mathématicien Thalès (600 A.JC.) De trouver la hauteur de la grande pyramide. A l'époque, il n'y avait ni appareils ni instruments ni méthodes permettant de trouver la hauteur de la pyramide directement.

Thalès a fixé un bâton verticalement, puis il a commencé à mesurer la longueur de son ombre, puis l'a comparée à la longueur réelle du bâton jusqu'à ce qu'il ait trouvé que la longueur de l'ombre est égale à la longueur du bâton. A ce moment, il a mesuré la longueur de l'ombre de la pyramide. Cette mesure était la même que la hauteur de la pyramide.

Si on te demande de trouver la hauteur du mât du drapeau en utilisant un bâton et une bande graduée, vas-tu attendre le moment où la longueur de l'ombre du bâton soit égale à la longueur de l'ombre du mât du drapeau ou tu peux calculer la hauteur du mât du drapeau à tout moment d'une journée ensoleillée ? Explique ta réponse.

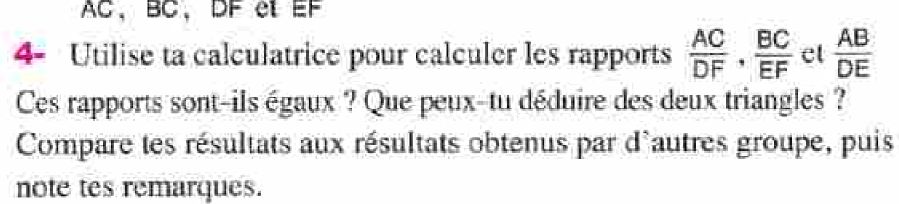
Travail coopératif

1- Trace un triangle ABC tel que : $m(\angle A) = 50°$, $m(\angle B) = 70°$ et $AB = 4cm$

2- Trace un triangle DEF tel que : $m(\angle D) = 50°$, $m(\angle E) = 70°$, $DE = 5cm$

3- Mesure à un millimètre près les longueurs des côtés: $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{DF}$ et $\overline{EF}$

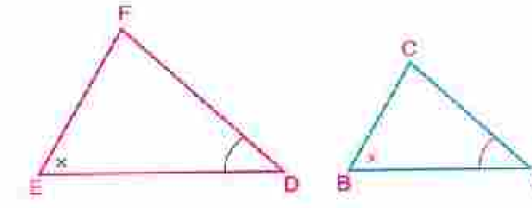
4- Utilise ta calculatrice pour calculer les rapports $\frac{AC}{DF}$, $\frac{BC}{EF}$ et $\frac{AB}{DE}$



Ces rapports sont-ils égaux ? Que peux-tu déduire des deux triangles ? Compare tes résultats aux résultats obtenus par d'autres groupe, puis note tes remarques.



Deux triangles ayant deux paires d'angles correspondants superposables sont semblables.



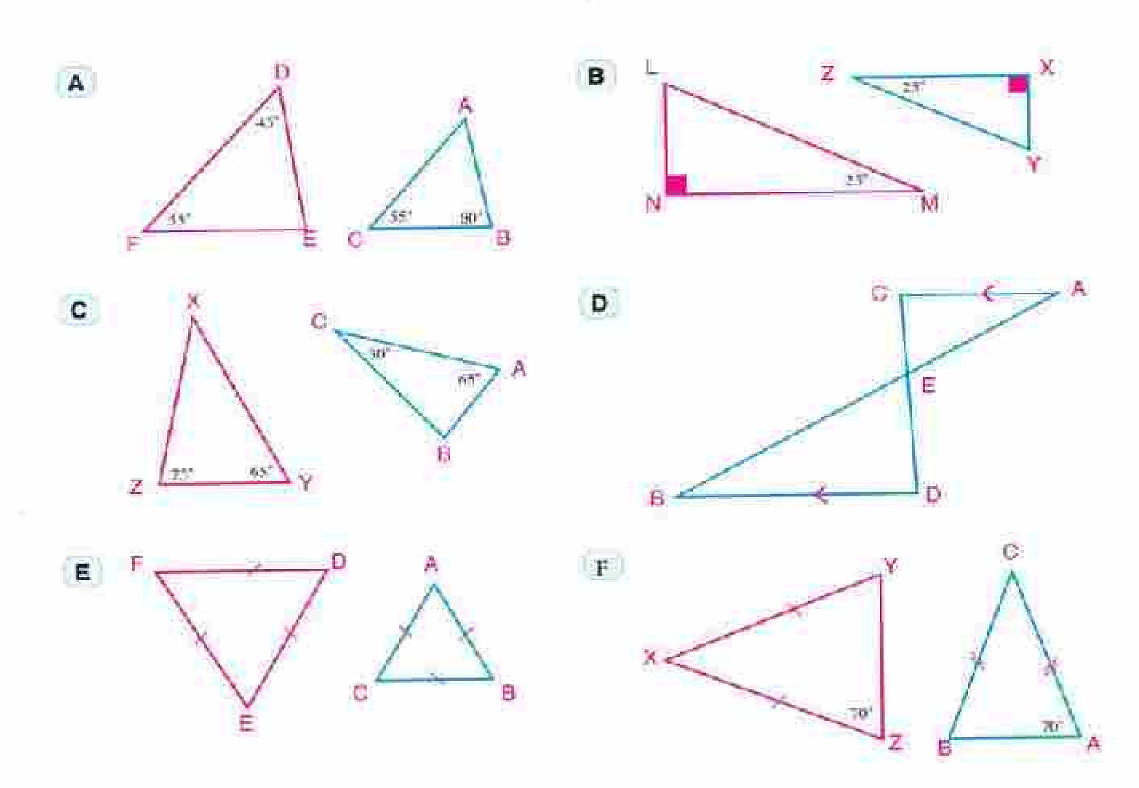
Dans la figure ci-contre :

Si $\angle A \equiv \angle D$, $\angle B \equiv \angle E$

alors $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Essaie de résoudre

1. Parmi les pairs de triangles suivants, lesquels sont semblables ? Écris les triangles semblables en ordonnant les sommets correspondants :



Remarque que:

1- Deux triangles équilatéraux sont semblables. (comme dans E)

2- Deux triangles isocèles sont semblables si un angle à la base dans l'un des deux triangles a la même mesure qu'un angle à la base dans l'autre triangle. (comme dans F).

3- Deux triangles rectangles sont semblables si un angle aigu dans l'un des deux triangles a la même mesure qu'un angle aigu dans l'autre triangle. (comme dans B).

Exemple

① ABC est un triangle. $D \in \overline{AB}$ et $E \in \overline{AC}$ tels que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$,
$BD = 1{,}2cm$, $AE = 3cm$, $AC = 4cm$ et $DE = 4{,}2cm$.

A Démontre que $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

B Trouve la longueur de $\overline{AD}$ et $\overline{BC}$



A $\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ et $\overleftrightarrow{AB}$ est une sécante.

$\therefore \angle ADE \equiv \angle ABC$

Dans les deux triangles ADE et ABC :

$\because \angle ADE \equiv \angle ABC$ (démontré)

$\angle DAE \equiv \angle BAC$ (angle commun)

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (axiome)

B $\because \triangle ADE \sim \triangle ABC$

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$:

$\frac{AD}{AD + 1.2} = \frac{3}{4} = \frac{4.2}{BC}$

$4\,AD = 3(AD + 1{,}2)$, $3BC = 4 \times 4{,}2$

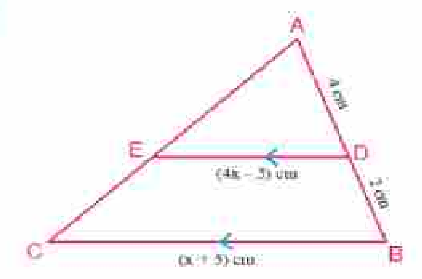
$4\,AD = 3AD + 3{,}6$ $BC = \frac{4 \times 4.2}{3}$

$AD = 3{,}6cm$ $BC = 5{,}6cm$

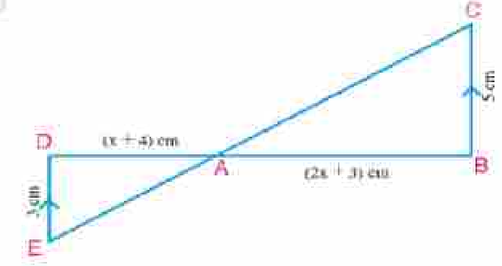
Essaie de résoudre

② Dans chacune des figures suivantes, démontre que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, puis trouve la valeur de x :





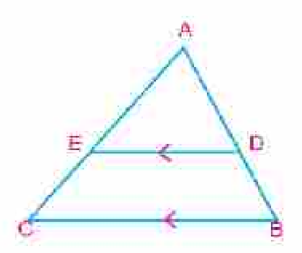


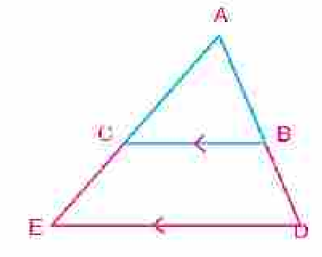


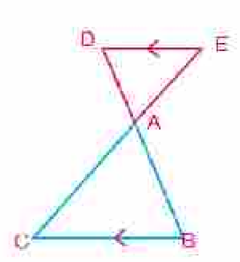
Résultats Importants



Si une droite parallèle à un côté d'un triangle coupe les deux autres côtés ou les droites qui les contiennent, le triangle formé est semblable au triangle initial.



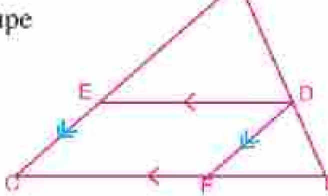




Si $\overleftrightarrow{DE} // \overline{BC}$ qui coupe $\overleftrightarrow{AB}$ et $\overleftrightarrow{AC}$ en D, et E respectivement comme le montre les trois figures précédentes :
alors $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

Exemple

2 **Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle et $D \in \overline{AB}$.
On trace $\overrightarrow{DE} // \overline{BC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en E, $\overrightarrow{DF} // \overline{AC}$ qui coupe $\overline{BC}$ en F. Démontre que : $\triangle ADE \sim \triangle DBF$



Solution

$\because \overline{DE} // \overline{BC}$ $\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ **(1)**

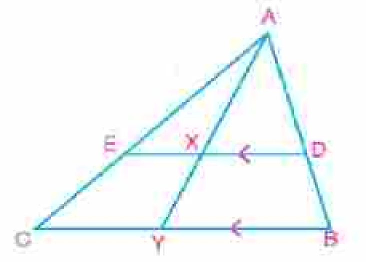
$\because \overline{DF} // \overline{AC}$ $\therefore \triangle DBF \sim \triangle ABC$ **(2)**

(1) et (2) on obtient : $\triangle ADE \sim \triangle DBF$ **(ce qu'il fallait démontrer)**



Essaie de résoudre

3 **Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle et $D \in \overline{AB}$
On trace $\overrightarrow{DE} // \overline{BC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en E, On trace $\overrightarrow{AX}$ qui coupe $\overline{DE}$ et $\overline{BC}$ en X et Y respectivement.



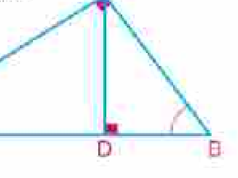
A Cite trois pairs de triangles semblables.

B Démontre que $\frac{DX}{BY} = \frac{XE}{YC} = \frac{DE}{BC}$.

Corollaire 2

La perpendiculaire issue du sommet de l'angle droit dans un triangle rectangle sur l'hypoténuse partage le triangle en deux triangles semblables et chacun des deux triangles obtenus est semblable au triangle initial.

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en A et $\overline{AD} \perp \overline{BC}$



Dans les deux triangles DBA et ABC on a :
$m(\angle ADB) = m(\angle CAB) = 90°$ et $\angle B$ est commun aux deux triangles

$\therefore \triangle DBA \sim \triangle ABC$ **(axiome)** **(1)**

De même $\triangle DAC \sim \triangle ABC$ **(2)**

$\because$ les deux triangles sont semblables à un même troisième
$\therefore \triangle DBA \sim \triangle DAC \sim \triangle ABC$

Exemple

③ ABC est un triangle rectangle en A et $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ .telque $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \{D\}$ .Démontre que DA est une moyenne proportionnelle entre DB et DC..

Solution

Hypothèses : Dans le triangle $\triangle ABC$: $m(\angle A) = 90°$, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.

Conclusion : Démontre que $(DA)^2 = DB \times DC$.

Démonstration : Dans le triangle $\triangle ABC$

$\because m(\angle A) = 90°$ et $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

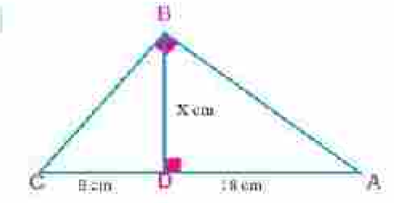
$\therefore \triangle DBA \sim \triangle DAC$ (corollaire)

$\therefore \frac{DA}{DC} = \frac{DB}{DA}$ d'où $(DA)^2 = DB \times DC$

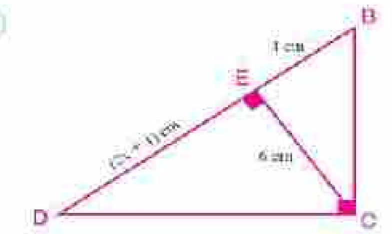
Essaie de résoudre

④ Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur numérique de x :

A



B



Exemple

④ **Dans la figure ci-contre, ABC** est un triangle rectangle en A et $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ Démontre que :

A $(AB)^2 = BC \times BD$

B $(AC)^2 = CB \times CD$


Solution

Dans le triangle ABC:

$\because m(\angle A) = 90°$, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle CBA$ (corollaire)

$\therefore \frac{AB}{CB} = \frac{BD}{BA}$, $(AB)^2 = BC \times BD$

, $\triangle ACD \sim \triangle BCA$ (corollairet)

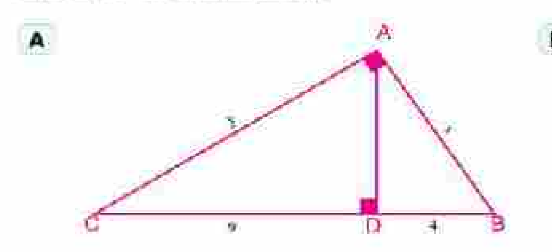
$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{CA}$, $(AC)^2 = CB \times CD$

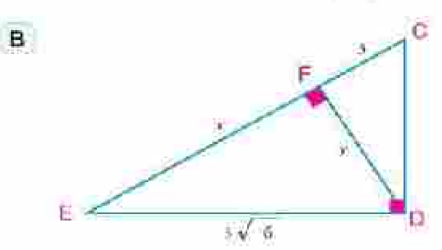


Dans les exemples 3 et 4 nous avons démontré le théorème d'Euclide déjà étudié au cycle préparatoire

Essaie de résoudre

(5) Trouve la valeur numérique de x et y dans la forme la plus simple (les dimensions sont mesurées en centimètres) :



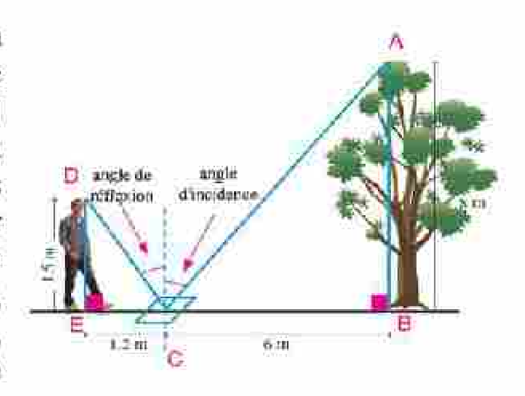


Mesure indirecte

Dans certaines situations, il est difficile de mesurer les distances ou les hauteurs directement. Dans ce cas, on peut utiliser la similitude de triangles pour trouver ces mesures d'une manière indirecte. L'une de ces méthodes consiste à utiliser la propriété de la réflexion de la lumière dans un miroir plat comme l'indique l'exemple suivant :

Exemple

(5) **Physique** : Youssef voulait déterminer la hauteur d'un arbre. Il a posé un miroir à une distance de 6 mètres du pied de l'arbre. Puis il a reculé jusqu'à ce qu'il ait pu voir le sommet de l'arbre à travers le centre du miroir. Dans cette position, la distance de Youssef au miroir était 1,2 mètre et la hauteur de ses yeux du sol était 1,5 mètre. Si les pieds de Youssef, le miroir et le pied de l'arbre sont alignés, trouve la hauteur de l'arbre sachant que l'angle d'incidence = l'angle de réflexion



Solution

Soient la hauteur de l'arbre x mètres et la mesure de l'angle d'incidence = $\theta°$

$\therefore$ la mesure de l'angle de réflexion $= \theta°$

Dans les deux triangles ABC et DEC

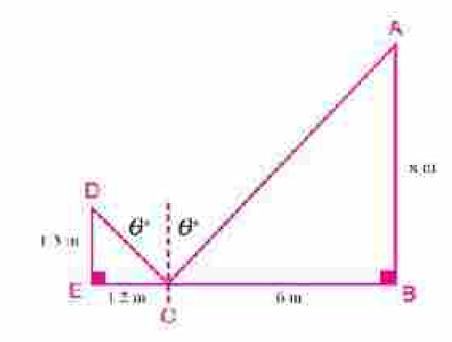
$m(\angle B) = m(\angle C) = 90°$

$m(\angle ACB) = m(\angle DCE) = (90 - \theta)°$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEC$ d'où $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EC}$

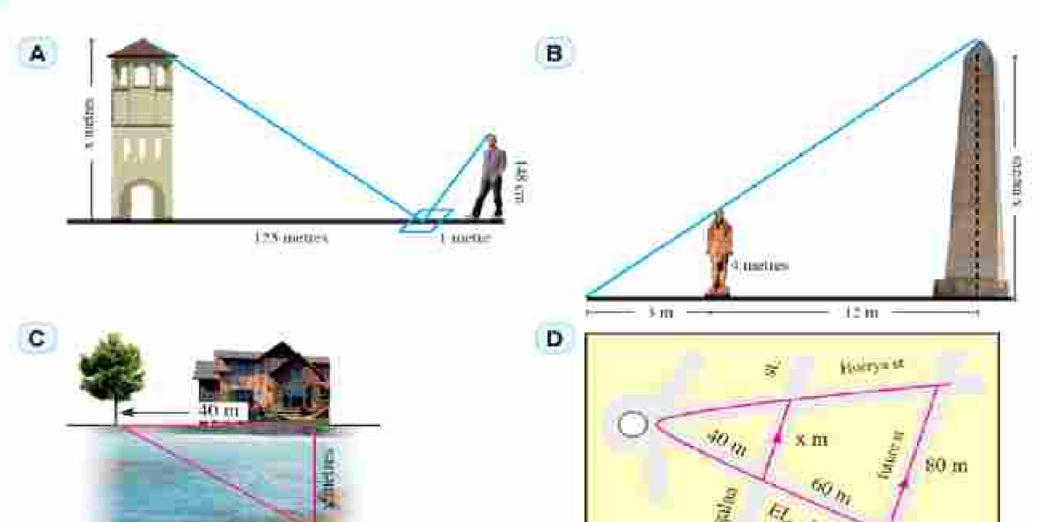
$\therefore \frac{x}{1.5} = \frac{6}{1.2}$, $x = 7.5$ mètres

Donc la hauteur de l'arbre est 7,5 mètres.



Essaie de résoudre

6 Trouve la distance x dans chacun des cas suivants :





Si les longueurs des côtés correspondants de deux triangles sont proportionnelles alors ces deux triangles sont semblables

Hypothèses : ABC et DEF sont deux triangles tels que $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$

Conclusion : Démontre que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Démonstration : Dans le triangle ABC

On détermine $X \in \overline{AB}$ tel que $AX = DE$

On trace $\overline{XY} \,//\, \overline{BC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en Y.

$\because \overline{XY} \,//\, \overline{BC}$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AXY$ (Corolaire (1))

$\therefore \frac{AB}{AX} = \frac{BC}{XY} = \frac{CA}{YA}$

$\because AX = DE$ (Construction)

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{XY} = \frac{CA}{YA}$ (1)

$\because \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (Hypothèse) (2)

De (1) et (2) on déduit que: $XY = EF$, $YA = FD$

et $\triangle AXY \equiv \triangle DEF$ (Les côtés correspondants sont superposables)

$\therefore \triangle DEF \sim \triangle AXY$

$\because \triangle ABC \sim \triangle AXY$ (Résultat démontré)

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$ (Ce qu'il fallait démontrer)

Exemple

6 **Dans la figure ci-contre,** B , Y et C sont alignés. Démontre que:

A $\triangle ABC \sim \triangle XBY$

B $\overrightarrow{BC}$ est une bissectrice de $\angle ABX$

Solution

A Dans les deux triangles ABC et XBY on a:

$\frac{AB}{XB} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$, $\frac{BC}{BY} = \frac{18+6}{18} = \frac{4}{3}$

$\frac{AC}{XY} = \frac{18}{13.5} = \frac{4}{3}$

Donc $\frac{AC}{XY} = \frac{BC}{BY} = \frac{AB}{XB}$ d'où les longueurs de trois côtés correspondants sont proportionnelles

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle XBY$

B $\because \triangle ABC \sim \triangle XBY$ $\therefore m(\angle ABC) = m(\angle XBY)$

Donc: $\overrightarrow{BC}$ est une bissectrice de $\angle ABX$

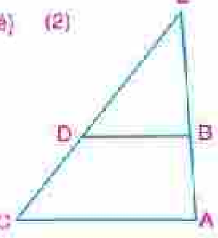
7 **Dans la figure ci-contre,** $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} = \{E\}$ tel que $\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE}$ et $\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DE}$

Démontre que $\overleftrightarrow{AC} \,//\, \overleftrightarrow{BD}$

Solution

$\because \frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE}$ $\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{CE}{DE}$ (Propriété de la proportionnalité) (1)

$\because \frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DE}$ $\therefore \frac{AC}{BD} = \frac{CE}{DE}$ (Propriété de la proportionnalité) (2)



De (1)et (2), on déduit que $\frac{AE}{BE} = \frac{CE}{DE} = \frac{CA}{DB}$

Donc $\triangle AEC \sim \triangle BED$

$\therefore m(\angle ACE) = m(\angle BDE)$

Ces deux angles sont alterne - internes par rapport à la sécante $\overleftrightarrow{CE}$

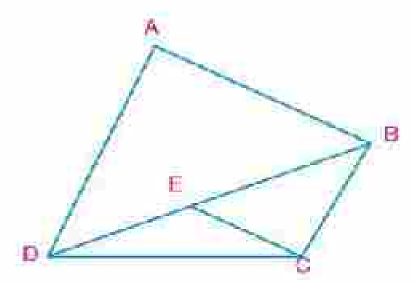
$\therefore \overleftrightarrow{AC} \,//\, \overleftrightarrow{BD}$

Essaie de résoudre

7 ABCD est un quadrilatère, $E \in \overline{BD}$ tel que:

$\frac{AB}{DA} = \frac{CE}{BC}$ et $\frac{BD}{DA} = \frac{EB}{BC}$. Démontre que :

A $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$ **B** $\overline{AB} \,//\, \overline{CE}$



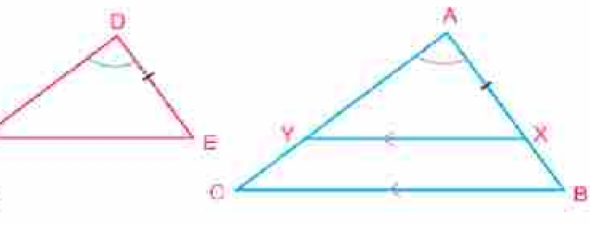


Si deux triangles ont deux paires de côtés de longueurs proportionnelles et si les angles compris entre ces deux côtés ont même mesure, alors les deux triangles sont semblables.

Hypothèses : $\angle A \equiv \angle D$, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

Conclusion : $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Démonstration : On détermine $X \in \overline{AB}$ tel que $AX = DE$



On trace $\overrightarrow{XY} \mathbin{//} \overline{BC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en Y

$\because \overline{XY} \mathbin{//} \overline{BC}$ $\therefore \triangle ABC \sim \triangle AXY$ (corollaire) (1)

$, \frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}$

$\because \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (hypothèse) , $AX = DE$ (construction)

$\therefore \frac{AB}{AX} = \frac{AC}{DF}$, $AY = DF$

$\therefore \triangle AXY \equiv \triangle DEF$ (deux côtés et un angle compris)

$\triangle AXY \sim \triangle DEF$ (2)

De (1) et (2), on déduit que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ Ce qu'il fallait démontrer.

Exemple

8 ABC est un triangle tel que AB = 8 cm, AC = 10 cm et BC = 12 cm. $E \in \overline{AB}$ tel que AE = 2cm, $D \in \overline{BC}$ tel que BD = 4cm.

A Démontre que $\triangle BDE \sim \triangle BAC$ puis déduis la longueur de $\overline{DE}$.

B Démontre que le quadrilatère ACDE est inscriptible.

Solution

$\because AB = 8cm$ et $AE = 2cm$ $\therefore BE = 6cm$

A Dans les deux triangles BDE et BAC on a :

$\angle DBE \equiv \angle ABC$ (1)

$, \frac{BD}{BA} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\frac{BE}{BC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$



$\therefore \frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$ (2)



De (1) et (2) $\therefore \triangle BDE \sim \triangle BAC$ (théorème)

De la similitude $\frac{DE}{AC} = \frac{1}{2}$

$\therefore DE = \frac{1}{2} AC$, $DE = \frac{1}{2} \times 10 = 5cm$

B De la similitude, on a $\angle$ BDE $\equiv$ $\angle$ BAC $\therefore$ m($\angle$ BDE) = m($\angle$ BAC)

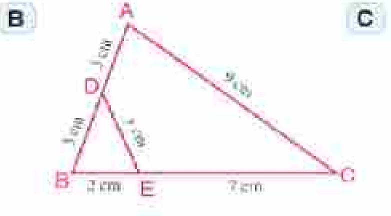
$\because$ $\angle$ BDE est extérieur au quadrilatère ACDE

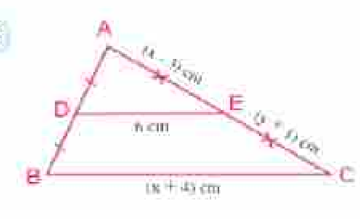
$\therefore$ ACDE est un quadrilatère inscriptible.

Essaie de résoudre

8 Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur numérique du symbole utilisé pour la mesure en expliquant ta réponse :

A

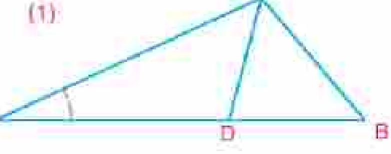
B 

C 

Exemple

9 ABC est un triangle. D $\in$ $\overline{BC}$ tel que $(AC)^2 = CD \times CB$. Démontre que $\triangle$ ACD $\sim$ $\triangle$ BCA

Solution



Dans les deux triangles ABC et DAC, $\angle$C est commun (1)

$\because$ $(AC)^2 = CD \times CB$

$\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{CD}{AC}$ (2)

De (1) et (2), on déduit que $\triangle$ ACD $\sim$ $\triangle$ BCA (théorème)

Essaie de résoudre

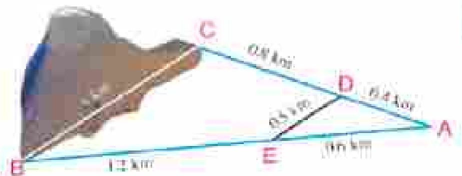
9 ABC et DEF sont deux triangles semblables. X est le milieu de $\overline{BC}$ et Y est le milieu de $\overline{EF}$. Démontre que

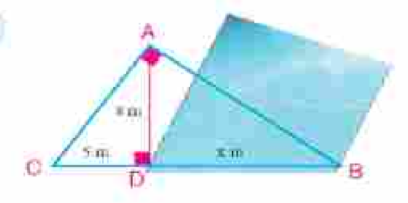
A $\triangle$ ABX $\sim$ $\triangle$ DEY

B AX $\times$ DE = AB $\times$ DY

Test de compréhension

Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur de x :

A 

B 

2 - 3

Relation entre les aires de deux polygones semblables

A apprendre

- Relation entre les périmètres de deux polygones semblables et rapport de similitude.
- Relation entre les aires de deux polygones semblables et rapport de similitude.

Expressions de base

- Périmètre
- Aire
- Aire d'un polygone
- Côtés correspondants

Matériel et moyens

- Ordinateur
- Vidéoprojecteur
- Logiciels
- Papiers quadrillé
- Calculatrice



Sur un papier quadrillé, trace les deux triangles ABC et XYC.



1- Démontre que :
$\triangle XYC \sim \triangle ABC$. Calcule le rapport de la similitude dans ce cas.

2- Calcul le rapport entre l'aire du triangle XYC et l'aire du triangle ABC.

3- Détermine un point $D \in \overline{AC}$ puis trace $\overrightarrow{DD'} \parallel \overline{AB}$ qui coupe $\overline{BC}$ en D' pour obtenir un triangle DD'C. Est-ce que $\triangle DD'C \sim \triangle XYC$?

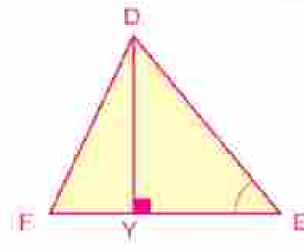
4- Complète le tableau suivant :

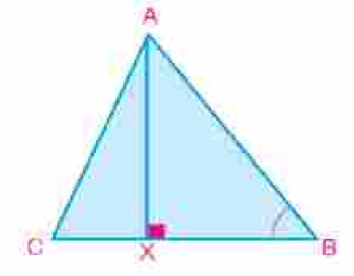
Triangles	Rapport de similitude	Aire du premier triangle	Aire du deuxième triangle	Rapport de l'aire du premier triangle à l'aire du deuxième triangle
$\triangle XYC \sim \triangle ABC$	$\frac{1}{3}$	4	36	$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
$\triangle DD'C \sim \triangle ABC$				
$\triangle XYC \sim \triangle DD'C$				

5- Quelle relation existe-t-il entre les rapports obtenus et les rapports de similitude ?

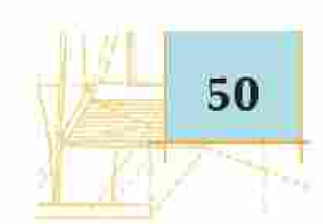
1) Rapport des aires de deux triangles semblables

Le rapport des aires de deux triangles semblables est égal au carré du rapport des longueurs de deux côtés correspondants.





Hypothèses : $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



Conclusion : $\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{CA}{FD}\right)^2$

> **Remarque**
> **La lettre A représente l'aire de la surface du polygone**

Démonstration : On trace $\overrightarrow{AX} \perp \overline{BC}$ tel que $\overrightarrow{AX} \cap \overline{BC} = \{X\}$,

On trace $\overrightarrow{DY} \perp \overline{EF}$ tel que $\overrightarrow{DY} \cap \overline{EF} = \{Y\}$

$\because \triangle ABC \sim \triangle DEF$

$\therefore m(\angle B) = m(\angle E)$ et $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (1)

Dans les deux triangles ABX et DEY on a :

$m(\angle X) = m(\angle Y) = 90°$, $m(\angle B) = m(\angle E)$

$\therefore \triangle ABX \sim \triangle DEY$ (Axiome)

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AX}{DY}$ (2)

$$\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \frac{\frac{1}{2} BC \times AX}{\frac{1}{2} EF \times AY} = \frac{BC}{EF} \times \frac{AX}{DY}$$

De (1) et (2) on obtient :

$$\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \frac{AB}{DE} \times \frac{AB}{DE} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{CA}{FE}\right)^2$$ (Ce qu'il fallait démonter)

Remarque que: $\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2$, $\frac{AB}{DE} = \frac{AX}{DY}$

D'où $\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \left(\frac{AX}{DY}\right)^2$

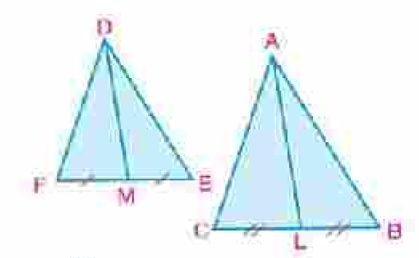
Donc le rapport entre les aires de deux triangles semblables est égal au carré du rapport entre les longueurs de deux hauteurs correspondantes dans les deux triangles.

Réflexion critique :

1- Si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, L est le milieu de $\overline{BC}$ et M est le milieu de $\overline{EF}$.

a-t-on $\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \left(\frac{AL}{DM}\right)^2$?

Explique ta réponse et note tes remarques

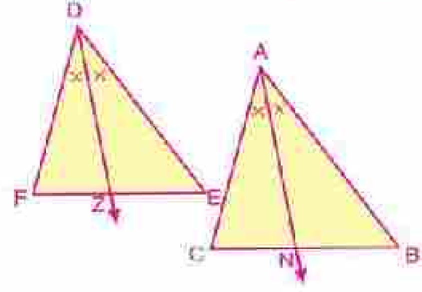


2- Si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $\overrightarrow{AN}$ est une bissectrice de $\angle A$ qui coupe $\overline{BC}$ en N,

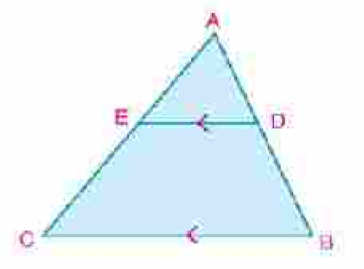
$\overrightarrow{DZ}$ est une bissectrice de $\angle D$ qui coupe $\overline{EF}$ en Z.

A-t-on $\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \left(\frac{AN}{DZ}\right)^2$?

Explique ta réponse et note tes remarques



Exemple



① **Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle, $D \in \overline{AB}$ tel que $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$, $\overrightarrow{DE} \,//\, \overline{BC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en E.

Si l'aire du triangle ABC = 784 cm², trouve :

A l'aire du tringle ADE **B** l'aire du trapèze DBCE

Solution

Dans Le triangle ADC :

$\because \overline{DE} \,//\, \overline{BC}$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (corollaire)

$\therefore \frac{A(\triangle ADE)}{A(\triangle ABC)} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2$ (théorème)

Donc $\frac{A(\triangle ADE)}{784} = \left(\frac{3}{7}\right)^2$ $\therefore A(\triangle ADE) = 784 \times \frac{9}{49} = 144 cm^2$

$\because$ Aire du trapèze DBCE = aire du triangle ABC – aire du triangle ADE

$\therefore$ Aire du trapèze DBCE = 784 – 144 = 640 cm²

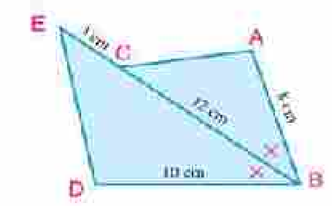
Essaie de résoudre

① **Dans la figure ci-contre :**

$\overrightarrow{BE}$ est une bissectrice de $\angle$ ABD,

$A(\triangle ABC) = 48 cm^2$

Calcule $A(\triangle EBD)$



Exemple

② Le rapport entre les aires de deux triangles semblables est 4 : 9 . Si le périmètre du grand triangle est 90 cm, trouve le périmètre du plus petit triangle.

Solution

Supposons que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

$\therefore \frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \frac{4}{9}$ d'où $\frac{AB}{DE} = \frac{2}{3}$

$\because \frac{\text{Périmètre de } \triangle ABC}{\text{Périmètre de } \triangle DEF} = \frac{AB}{DE} = \frac{2}{3} < 1$

$\therefore$ Périmètre $\triangle ABC$ < Périmètre $\triangle DEF$

D'où $\frac{\text{Périmètre } (\triangle ABC)}{90} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ Périmètre $\triangle ABC = 60cm$

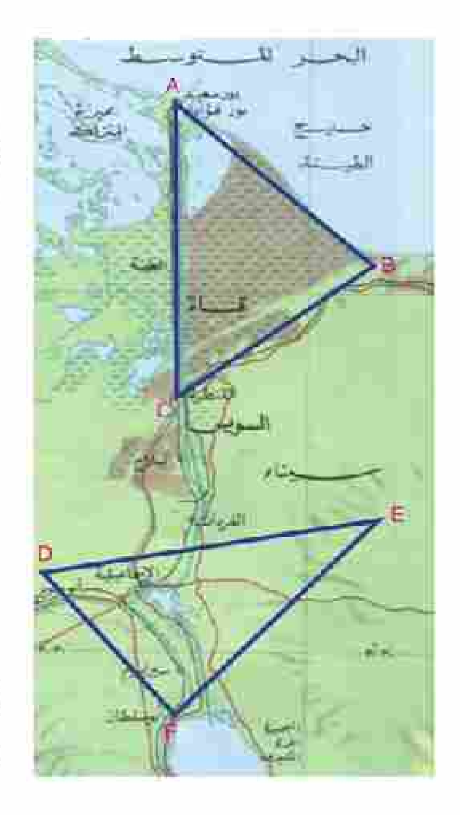
Essaie de résoudre

(2) ABC et DEF sont deux triangles semblables et $\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \frac{3}{4}$

A) Si le périmètre du plus petit triangle est $45\sqrt{3}$ cm, calcule le périmètre du plus grand triangle

B) Si EF = 28 cm, trouve la longueur de $\overline{BC}$.

Exemple



(3) Si chaque centimètre sur la carte représente 10 kilomètres en réalité, trouve à un kilomètre carré près, l'aire réelle de la surface représentée sur la carte par le triangle ABC sachant que $(\triangle ABC) = 6{,}4\text{cm}^2$.

Solution

Echelle = Rapport de similitude = $\frac{1}{10 \times 10^5}$

$\frac{A(\triangle ABC)}{\text{Aire réelle}}$ = Le carré du rapport de similitude

$\frac{6{,}4}{\text{Aire réelle}} = \left(\frac{1}{10 \times 10^5}\right)^2$

Aire réelle $= 6{,}4 \times 10 \times 10 \times 10^5 \times 10^5 \text{ cm}^2$

$\simeq 640 \text{ km}^2$

Essaie de résoudre

(3) A) Dans la carte ci-dessus, utilise les instruments de mesure pour calculer en centimètres carrés l'aire du triangle DEF. Utilise le résultat pour estimer l'aire réelle de la surface représentée par ce triangle.

B) Utilise une carte de la République Arabe d'Egypte pour calculer à une centaine de kilomètres carrés près la superficie du Sinaï. Compare ton résultat aux résultats de tes camarades.

2) Rapport des aires de deux polygones semblables



Cherche avec l'un de tes camarades la possibilité de partager deux polygones semblables en un même nombre de triangles correspondants semblables.

1- Dessine des polygones semblables comme dans les figures (1) et (2).

2- Dans la figure (1) , trace $\overrightarrow{AC}$. Que remarques-tu ?

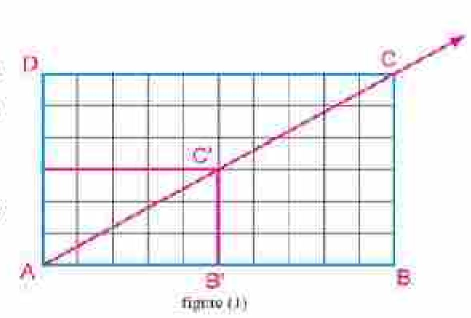


figure (1)



3- Dans la figure (2) , trace $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$. Que remarques-tu ? Trouves-tu une interprétation à tes remarques ?

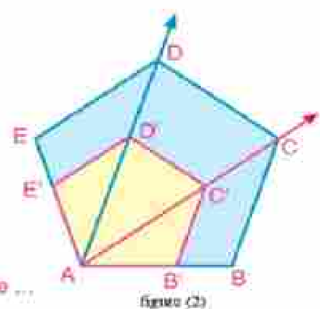


figure (2)

Remarque que: Dans les deux triangles AB'C' et ABC, on a :

$m(\angle AB'C') = m(\angle B)$ (de la similitude des deux polygon

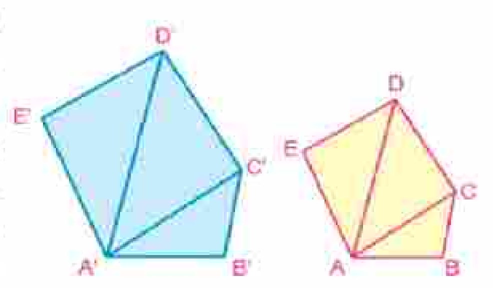
d'où $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$

$\therefore \triangle AB'C' \sim \triangle ABC$ (corollaire)

De même $m(\angle AE'D') = m(\angle E)$

$\therefore \overline{E'D'} \parallel \overline{ED}$ et par conséquent $\triangle AE'D' \sim \triangle AED$ et ainsi de suite ...

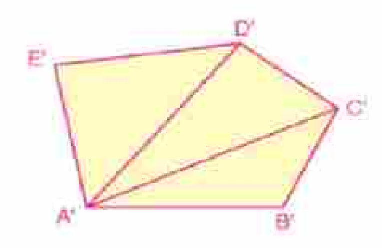
Corollaire : Deux polygones semblables peuvent être partagés en un même nombre de triangles deux à deux semblables.

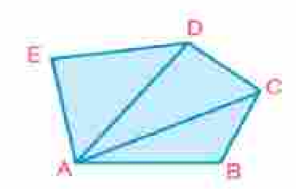


Remarque : Le corollaire précédent est vrai quelque soit le nombre de côtés dans les deux polygones semblables (deux polygones semblables ont le même nombre de côtés). Si le nombre de côtés d'un polygone est n côtés, il peut être partagé (par des diagonales tracées d'un même sommet) en $(n-2)$ triangles.

Théorème 4

Le rapport des aires de deux polygones semblables est égal au carré du rapport des longueurs de deux côtés correspondants.





Hypothèses : polygone ABCDE ~ polygone A'B'C'D'E'

Conclusion : $\dfrac{A\text{(polygone ABCDE)}}{A\text{(polygone A'B'C'D'E')}} = \left(\dfrac{AB}{A'B'}\right)^2$

Démonstration : Des points A et A' on trace $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{A'C'}$ et $\overline{A'D'}$

$\because$ polygone ABCDE ~ polygone A'B'C'D'E'

$\therefore$ Ils peuvent être partagés en un même nombre de triangles correspondants semblables (corollaire)

On a : $\dfrac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle A'B'C')} = \left(\dfrac{BC}{B'C'}\right)^2$, $\dfrac{A(\triangle ACD)}{A(\triangle A'C'D')} = \left(\dfrac{CD}{C'D'}\right)^2$, $\dfrac{A(\triangle ADE)}{A(\triangle A'D'E')} = \left(\dfrac{DE}{D'E'}\right)^2$

$\because \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DE}{D'E'} = \dfrac{AB}{A'B'}$ (de la similitude des deux polygones)

$\therefore \frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle A'B'C')} = \frac{A(\triangle ACD)}{A(\triangle A'C'D')} = \frac{A(\triangle ADE)}{A(\triangle A'D'E')} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$

D'après les propriétés de la proportionnalité :

$\frac{A(\triangle ABC) + A(\triangle ACD) + A(\triangle ADE)}{A(\triangle A'B'C') + A(\triangle A'C'D') + A(\triangle A'D'E')} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$

D'où $\frac{A\text{ (polygone ABCDE)}}{A\text{ (polygone A'B'C'D'E')}} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$ (Ce qu'il fallait démontrer)

Remarque

$\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \frac{(AB)^2}{(A'B')^2}$

Essaie de résoudre

4 **A** Si Polygone ABCD ~ Polygone A'B'C'D' et $\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{3}$, trouve le valeur de : $\frac{A\text{ (polygone ABCD)}}{A\text{ (polygone A'B'C'D')}}$, $\frac{\text{périmètre du polygone ABCD}}{\text{périmètre du polygone A'B'C'D'}}$

B Si les deux polygones ABCDE et A'B'C'D'E' sont semblables, et si le rapport entre leurs aires est 4 : 25 , trouve le valeur de : $\frac{AB}{A'B'}$, $\frac{\text{périmètre du polygone AB CDE}}{\text{périmètre du polygone A'B'C'D'E'}}$

C Si le rapport entre les périmètres de deux polygones est 1 : 4 et l'aire du premier polygone est 25 cm², calcule l'aire du deuxième polygone.

D Si les longueurs de deux côtés correspondants dans deux polygones semblables sont 12 cm et 13 cm et si l'aire du plus petit polygone est 135 cm², calcule l'aire du plus grand polygone.

Exemple

4 ABCD et XYZL sont deux polygones semblables tels que $m(\angle A) = 40°$ et $XY = \frac{3}{4} AB$, CD = 16cm.

Calcule : **1°)** $m(\angle X)$

2°) la longueur de $\overline{ZL}$

3°) A(polygone ABCD) : A (polygone X Y Z L)

Solution

1°) $\because$ polygone ABCD ~ polygone XYZL

$\therefore m(\angle A) = m(\angle X)$ d'où $m(\angle X) = 40°$ (C.Q.F.D en 1°)

2°) $\because XY = \frac{3}{4} AB \quad \therefore \frac{AB}{XY} = \frac{4}{3}$ (propriété de la proportionnalité)

De la similitude des deux polygones, on déduit que $\frac{AB}{XY} = \frac{CD}{ZL}$

$\therefore \frac{4}{3} = \frac{16}{ZL}$ donc $ZL = \frac{3 \times 16}{4} = 12$cm (C.Q.F.D en 2°)

3°) A(polygone ABCD) : A (polygone XYZL) $= (AB)^2 : (XY)^2$

$= 16k^2 : 9k^2$

$= 16 : 9$ (C.Q.F.D en 3°)

Remarque

AB = 4k

XY = 3k

$k \neq 0$

Exemple

5 Le rapport entre les périmètres de deux polygones semblables est $3 : 4$. Si la somme de leurs aires est $225\ cm^2$, calcule l'aire de chaque polygone.

Solution

$\because$ Le rapport entre les périmètres des deux polygones $= 3 : 4$

$\therefore$ Le rapport entre deux côtés correspondants $= 3 : 4$

Supposons que l'aire du premier polygone $= 9\,x\ cm^2$,

$\therefore$ l'aire du deuxième polygone $= 16\ x cm^2$

$\therefore 9x + 16x = 225$, d'où $x = \frac{225}{9+16} = 9$

$\therefore$ L'aire du premier polygone $= 9 \times 9 = 81 cm^2$

$\therefore$ L'aire du deuxième polygone $= 16 \times 9 = 144 cm^2$

Essaie de résoudre

5 **Lien avec l'agriculture :** Deux fermes ont la forme de deux polygones semblables. Le rapport entre les longueurs de deux côtés correspondants est $5 : 3$. Si la différence entre leurs superficies est égale à 32 acres, trouve l'aire de chaque ferme.

Exemple

6 ABCD et XYZL sont deux polygones semblables. Les deux diagonales du premier polygone se coupent en M et les deux diagonales du deuxième polygone se coupent en N. Démontre que A(polygone ABCD) : A(polygone XYZL) $= (MC)^2 : (NZ)^2$

Solution

$\because$ polygone ABCD $\sim$ polygone XYZL

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle XYZ$,

et $\triangle DBC \sim \triangle LYZ$ (corollaire)

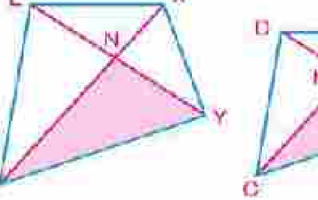
$\therefore \triangle MBC \sim \triangle NYZ$ (pourquoi ?)

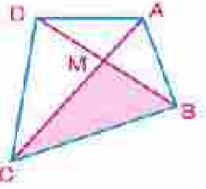
d'où $\frac{BC}{YZ} = \frac{MC}{NZ}$ (1)

$\because$ polygone ABCD $\sim$ polygone XYZL

$\therefore \frac{\text{Aire du polygone ABCD}}{\text{Aire du polygone XYZL}} = \left(\frac{BC}{YZ}\right)^2$ (2)







De (1) et (2), on déduit que :

A(polygone ABCD) : A(polygone XYZL) $= (MC)^2 : (NZ)^2$



Essaie de résoudre

6 ABCD et XYZL sont deux polygones semblables. Si M est le milieu de $\overline{BC}$ et N est le milieu de $\overline{YZ}$, démontre que A(polygone ABCD) : A(polygone XYZL) = $(MD)^2 : (NL)^2$

Exemple

7 ABC est un triangle rectangle en B. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ et $\overline{AC}$ sont trois côtés correspondants dans trois polygones semblables X , Y et Z construits respectivement sur les trois côtés du triangle ABC. Démontre que A(polygone X) + A(polygone Y) = A(polygone Z)

Solution

$\because$ polygone X ~ polygone Z $\quad \therefore \dfrac{A(\text{polygone X})}{A(\text{polygone Z})} = \dfrac{(AB)^2}{(AC)^2}$

$\because$ polygone Y ~ polygone Z $\quad \therefore \dfrac{A(\text{polygone Y})}{A(\text{polygone Z})} = \dfrac{(BC)^2}{(AC)^2}$

$\therefore \dfrac{A(\text{polygone X})}{A(\text{polygone Z})} + \dfrac{A(\text{polygone Y})}{A(\text{polygone Z})} = \dfrac{(AB)^2}{(AC)^2} + \dfrac{(BC)^2}{(AC)^2} = \dfrac{(AB)^2 + (BC)^2}{(AC)^2}$ (1)

$\because m(\angle B) = 90^\circ \quad (AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$ (2)

De (1) et (2), on déduit que $\dfrac{A(\text{polygone X})}{A(\text{polygone Z})} + \dfrac{A(\text{polygone Y})}{A(\text{polygone Z})} = 1$

D'où A (polygone X) + A(polygone Y) = A(polygone Z)

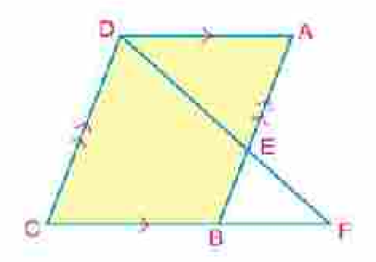
Essaie de résoudre

7 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 5 cm et BC = 13 cm. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ et $\overline{AC}$ sont trois côtés correspondants dans trois polygones semblables L , M et N construits respectivement sur les trois côtés du triangle ABC à l'extérieur du triangle. Si l'aire du polygone L est égale à 100 cm², calcule l'aire de chacun des polygones M et N.

Test de compréhension

Dans la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme

$E \in \overline{AB}$ tel que $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{3}{2}$, $\overrightarrow{DE} \cap \overrightarrow{CB} = \{F\}$



1 Démontre que: △ DCF ~ △ EAD

2 Trouve $\dfrac{A(\triangle DCF)}{A(\triangle EAD)}$

2 - 4 Application de la similitude dans le cercle

A apprendre

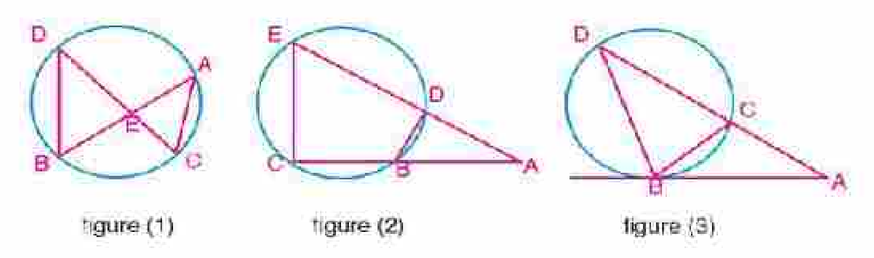
- Relation entre deux cordes sécantes d'un cercle.
- Relation entre deux sécantes d'un cercle d'un point extérieur au cercle.
- Relation entre la longueur d'une tangente à un cercle et les longueurs des deux parties d'une sécante tracées d'un point à l'extérieur du cercle.
- Modélisation, résolution de problèmes et application à la vie quotidienne utilisant la similitude des polygones dans un cercle.

Expressions de base

- Corde
- Sécante
- Tangente
- Diamètre
- Tangente commune extérieurement
- Tangente commune intérieurement
- Cercles concentriques



Dans chacune des figures suivantes, il y a deux triangles semblables. Ecris les noms des triangles en ordonnant les sommets correspondants, puis déduis les côtés correspondants.



- **Dans la figure (1):** Y a-t-il une relation entre EA × EB et EC × ED ?
- **Dans la figure (2):** Y a-t-il une relation entre AE × AD et AC × AB ?
- **Dans la figure (3):** Y a-t-il une relation entre AD × AC et $(AB)^2$?

Problème type

Si deux droites contenant respectivement deux cordes $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ d'un cercle se coupent en un point E , alors EA × EB = EC × ED

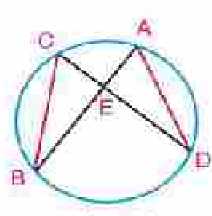


figure (1)

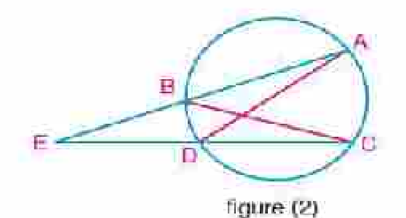


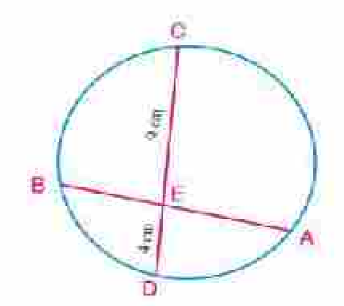
figure (2)

Pour démontrer ce résultat :

- Trace $\overline{AD}$ et $\overline{BC}$
- Dans chacune des deux figures, démontre que les deux triangles EAD et ECB sont semblables. Par conséquent, on obtient :

$\frac{EA}{EC} = \frac{ED}{EB}$ $\therefore EA \times EB = EC \times ED$

Exemple



1 **Dans la figure ci-contre,** $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\}$,

Si $\frac{EA}{EB} = \frac{4}{3}$, EC = 9cm et ED = 4cm,

trouve la longueur de $\overline{EB}$

Solution

$\because \frac{EA}{EB} = \frac{4}{3}$ $\therefore$ EA = 4k et EB = 3k où $k \neq 0$

$\because \overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\}$ $\therefore$ EA × EB = EC × ED (problème type)

d'où : 4k × 3k = 9 × 4

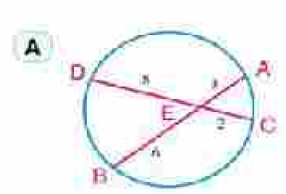
$12k^2 = 36$

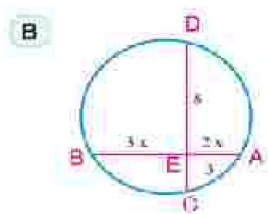
$k^2 = 3$

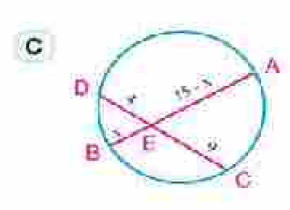
$k = \sqrt{3}$, EB = $3\sqrt{3}$ cm

Essaie de résoudre

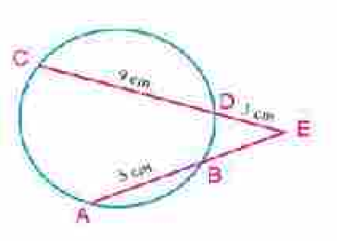
1 Trouve la valeur de x dans chacune de figures suivantes (les longueurs sont mesurées en centimètres) :

A


B


C


Exemple



2 **Dans la figure ci-contre,** $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} = \{E\}$, AB = 5cm, CD = 9cm et ED = 3cm. Trouve la longueur de $\overline{BE}$

Solution

Soit la longueur de BE = x cm.

$\because \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} = \{E\}$

$\therefore$ EB × EA = ED × EC (problème type)

Donc: x (x + 5) = 3 (3 + 9)

$x^2 + 5x - 36 = 0$

$(x - 4)(x + 9) = 0$

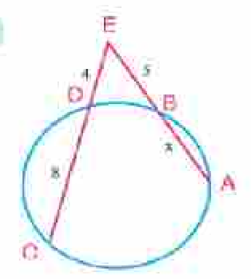
$\therefore$ x = 4 , x = -9 refusée

$\therefore$ La longueur de $\overline{BE}$ = 4cm.

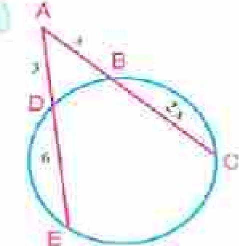
Essaie de résoudre

2 Trouve la valeur de x dans chacune des figures suivantes :

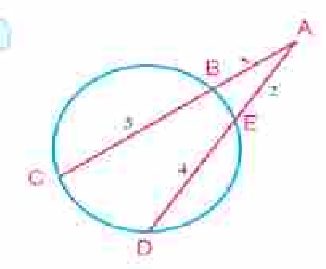
A



B



C

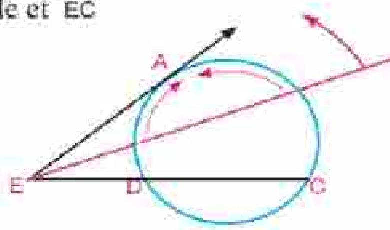




Corollaire 1 **D'un point extérieur à un cercle si on mène une sécante et une tangente, le produit de la longueur de la sécante par la longueur de la partie extérieure de la sécante est égal au carré de la longueur de la tangente.**

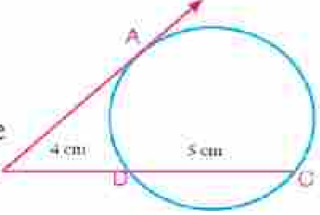
Dans la figure ci-contre, $\overrightarrow{EA}$ est une tangente au cercle et $\overrightarrow{EC}$ coupe le cercle en D, C

$\therefore (EA)^2 = ED \times EC$

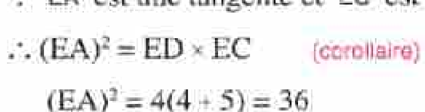




3 **Dans la figure ci-contre,** $\overrightarrow{EA}$ coupe le cercle en D et C respectivement.
Si ED = 4cm, CD = 5cm, trouve la longueur de $\overline{EA}$



Solution



$\because$ $\overrightarrow{EA}$ est une tangente et $\overrightarrow{EC}$ est une sécante au cercle

$\therefore (EA)^2 = ED \times EC$ (corollaire)

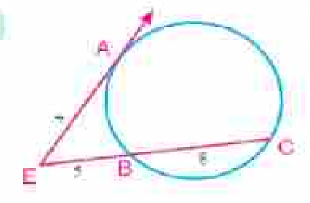
$(EA)^2 = 4(4 + 5) = 36$

$\therefore$ EA = 6cm

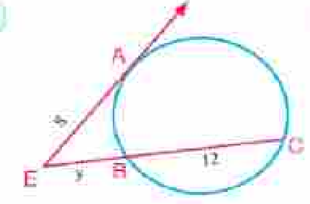
Essaie de résoudre

3 Dans chacune de figures suivantes, $\overrightarrow{EA}$, est une tangente au cercle. Trouve la valeur numérique de x , y et z (les longueurs sont mesurées en centimètres) :

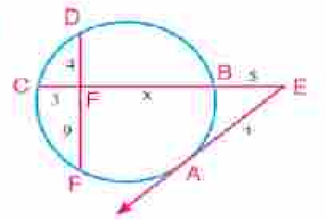
A



B



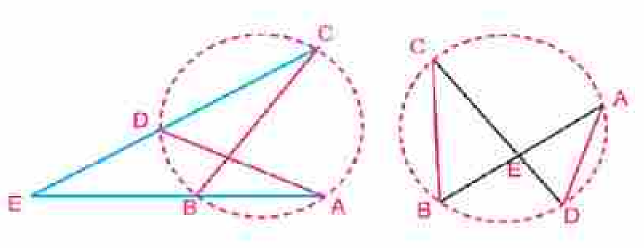
C



Réciproque du problème type

Si deux droites contenant respectivement deux segments $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ se coupent en un point E (différent des points A , B , C et D) et si EA × EB = EC × ED , alors les points A , B , C et D sont cocycliques.

Remarque que:



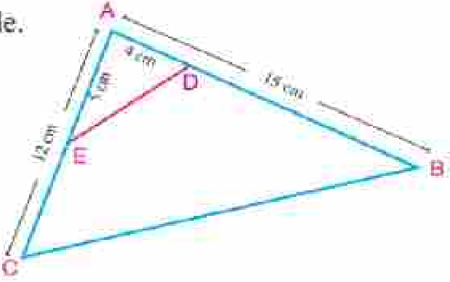
EA × EB = EC × ED

donc $\frac{EA}{EC} = \frac{ED}{EB}$

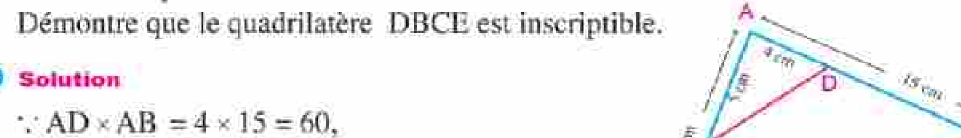
- A-t-on △ EAD ~ △ ECB? Pourquoi ?
- A-t-on m (∠A) = m (∠C)? Pourquoi ?
- Les points A , B , C , et D appartiennent-ils à un même cercle ? Explique ta réponse.

Exemple

④ Soit ABC un triangle tel que AB = 15 cm et AC = 12 cm. D ∈ $\overline{AB}$ tel que AD = 4cm et E ∈ $\overline{AC}$ tel que AC = 5cm.
Démontre que le quadrilatère DBCE est inscriptible.



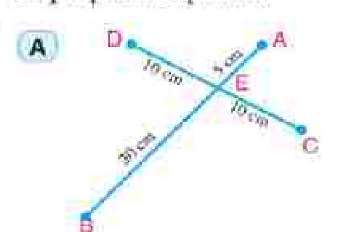
Solution

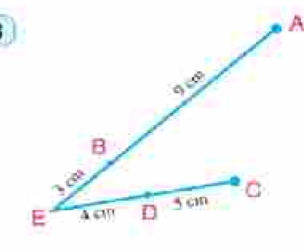


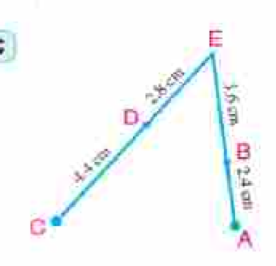
∵ AD × AB = 4 × 15 = 60,
AE × AC = 5 × 12 = 60
∴ AD × AB = AE × AC
∵ $\overrightarrow{BE} \cap \overrightarrow{CE}$ = {A} et AD × AB = AE × AC
∴ les points D , B , C et E sont cocycliques. (Réciproque du problème type)
d'où le quadrilatère DBCE est inscriptible

Essaie de résoudre

④ Dans lesquelles des figures suivantes, les points A , B , C et D sont-ils cocycliques ? Explique ta réponse.

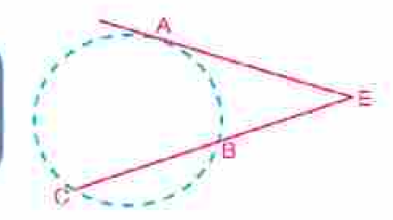






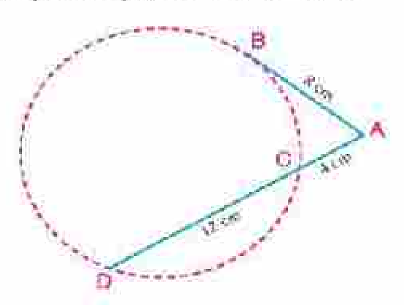
Corollaire 2

Si $(EA)^2 = EB \times EC$ alors $\overleftrightarrow{EA}$ est une tangente au cercle passant par les points A , B et C.



Exemple

5 Soit ABC un triangle tel que AB = 8 cm et AC = 4 cm. D ∈ $\overrightarrow{AC}$ et D ∉ $\overline{AC}$ tel que CD = 12cm. tel que $\overline{AB}$ est une tangente au cercle passant par les points B , C et D.



Solution

$\because$ AC × AD = 4 (4 + 12) = 64,

et $(AB)^2 = (8)^2 = 64$

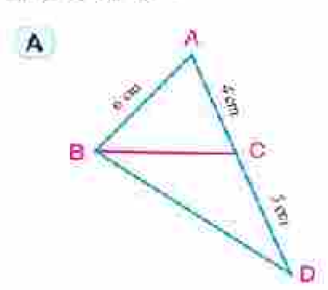
$\therefore (AB)^2 = AC \times AD$

$\therefore$ $\overline{AB}$ est une tangente au cercle passant par les points B , C et D.

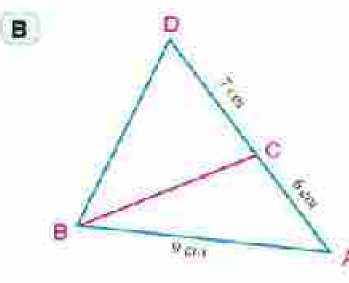
Essaie de résoudre

5 Dans lesquelles des figures suivantes, $\overleftrightarrow{AB}$ est une tangente au cercle passant par les points B , C et D ?

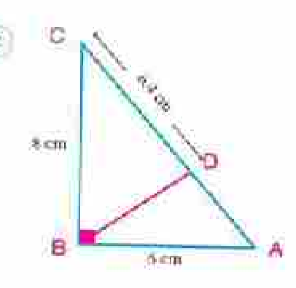
A



B

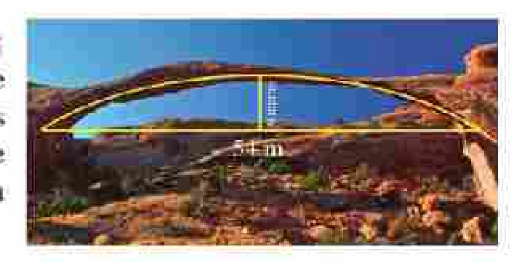


C



Exemple

6 **Application à la vie quotidienne : Liens avec la Géologie :** Dans une zone côtière, il y a une couche de sol sous la forme d'un arc naturel. Les géologues ont trouvé que c'est un arc de cercle comme le montre la figure ci-contre. Trouve la longueur du rayon du cercle de cet arc.



Solution

Soit la longueur de rayon du cercle = R mètres

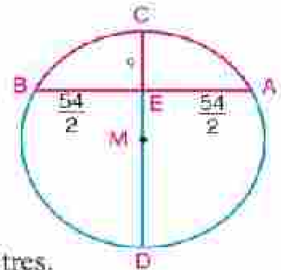
$\because$ $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont deux cordes sécantes en E

$\therefore$ EA × EB = EC × ED

$27 \times 27 = 9 \times (2R - 9)$

$2R - 9 = 81$

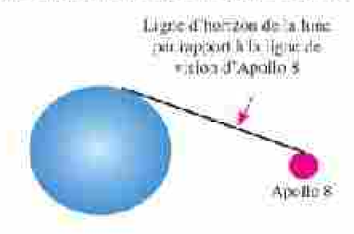
$R = 45$



La longueur du rayon du cercle de cet arc est égale à 45 mètres.

Activité

Lien avec l'espace : Apollo 8 est le premier vaisseau spatial qui amène un Homme vers l'orbite lunaire.



La ligne de vision d'Apollo 8 vers l'horizon de la lune est une droite tangente et le vaisseau a volé dans une orbite circulaire à une altitude moyenne de 180 km de la surface de la lune. Calcule la distance entre le vaisseau et l'horizon de la lune sachant que le rayon de la lune est approximativement 1740 kilomètres.

Solution

On peut modéliser le problème sous forme d'un cercle de centre M où $\overline{AB}$ représente la ligne de vision d'Apollo 8 à l'horizon du vaisseau. AB est la distance entre le vaisseau et l'horizon de la lune.

$AC = 180\text{km}$ (altitude moyenne de la surface de la lune)

$CD = 2 \times 1740 = 3480$ km (diamètre de la lune)

$AD = 3480 + 180 = 3660\text{km}$

On a : $(AB)^2 = AC \times AD$ (tangente et parties de la sécante)

$= 180 \times 3660 = 658800$

$AB \simeq 812\text{km}$

La distance entre le vaisseau et l'horizon de la lune est égale environ 812 km



Essaie de résoudre

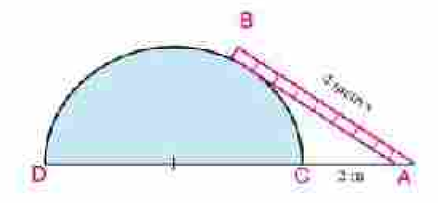
6 **Lien avec l'ingénierie routière :** On creuse les tunnels circulaires pour faciliter la circulation des véhicules et pour éviter les embouteillages.



Quelle est la longueur du rayon du tunnel illustré par la figure ci-contre sachant que la hauteur de l'arc au dessus du centre du tunnel est égale à 4 mètres.

Test de compréhension

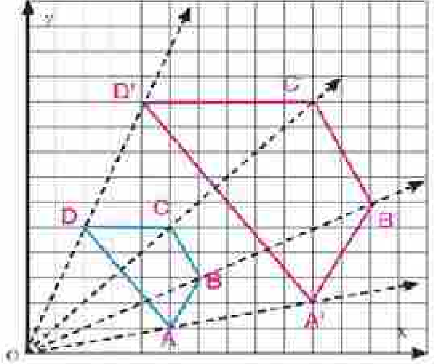
Lien avec l'industrie : Une échelle de longueur 4 mètres repose par l'une de ses extrémités sur un sol horizontal rugueux et par l'autre extrémité sur un réservoir sous forme d'une demi-sphère comme le montre la figure ci-contre. Si la distance entre l'extrémité inférieure de l'échelle et la base du réservoir est 2 mètres, calcule la longueur du rayon de la demi-sphère.



Activité

Homothétie

Tu utilises peut-être certains logiciels sur ton ordinateur pour agrandir ou pour réduire des documents ou des images à une taille donnée pour pouvoir les insérer dans un lieu déterminé.



La figure ci-contre, illustre une figure ABCD et son image A'B'C'D' par une transformation géométrique.

1- Compare les mesures des angles correspondants :

∠A, ∠A' - ∠B , ∠B'

∠C, ∠C' - ∠D , ∠D' Que peux-tu déduire ?

2- Calcule les rapports des longueurs des côtés correspondants:

$\frac{AB}{A'B'}$, $\frac{BC}{B'C'}$, $\frac{CD}{C'D'}$, $\frac{DA}{D'A'}$ Que peux-tu déduire ?



3-A-t-on Polygone ABCD ~ polygone A'B'C'D' ?

Tu as déjà étudié que les transformations géométriques (symétrie – translation – rotation) sont des isométries du plan car la figure et son image sont superposables et par conséquent, les angles ont une même mesure et les côtés correspondants ont une même longueur.

La figure précédente montre une autre transformation où les angles correspondants ont même mesure et les longueus des côtés correspondants sont proportionnelles. La transformation présentée dans la figure est appelée homothétie.

Définition

Homothétie

Soit O un point fixe d'un plan et k un nombre tel que $k \in \mathbb{R}^*$

L'homothétie (O , k) : On appelle une homothétie de centre O et de rapport k la transformation géométrique qui transforme tout point A du plan en un autre point A' du même plan telle que :

$OA' = |K| \times OA$

Rappel

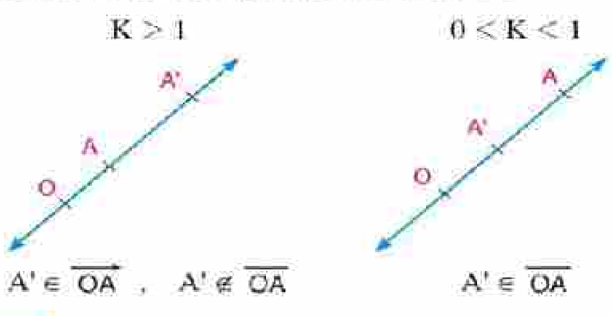
$|K| = K$, $K > 0$

$|K| = -K$, $K < 0$

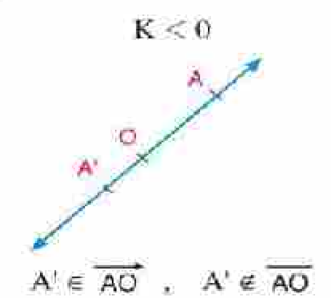
On note $H_{(O,\,k)}\,A = (A')$ qui se lit : A' est l'image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport k.

Remarques importantes :

(1) Soient O et A deux points dans un plan. Si on trace $\overleftrightarrow{OA}$, alors :



$A' \in \overrightarrow{OA}$, $A' \notin \overline{OA}$ $A' \in \overline{OA}$



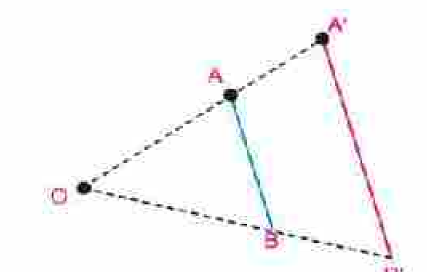
$A' \in \overrightarrow{AO}$, $A' \notin \overline{AO}$

Réfléchis :

Si $H_{(O,2)} A = (A')$, et $H_{(O,2)} B = (B')$, détermine la position des deux points A' et B'. A t on $\overline{A'B'} // \overline{AB}$? Explique ta réponse.

2 Si $H_{(O,2)} A = (A')$, et $H_{(O,2)} B = (B')$

alors , $\overline{A'B'}$ est l'image de $\overline{AB}$,



Dans les deux triangles

$\triangle OA'B'$, $\triangle OAB$ on a :

$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k$, $\angle B$ est commun

$\therefore \triangle OA'B' \sim \triangle OAB$

De ce qui précède, on déduit que :

1°) $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k$ 2°) $\overline{A'B'} // \overline{AB}$

3 L'homothétie conserve :

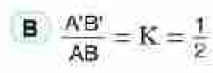
A le rapport entre les longueurs

B l'alignement et interligne

C les mesures d'angles

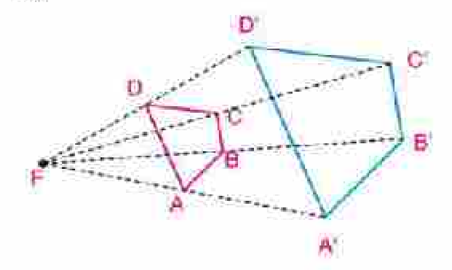
D le parallélisme

Remarque que:

| Rapport de similitude k | = 

Les figures suivantes montrent le cas où l'homothétie de centre O est un agrandissement et le cas où c'est une réduction :

A $\frac{A'B'}{AB} = K = 2$

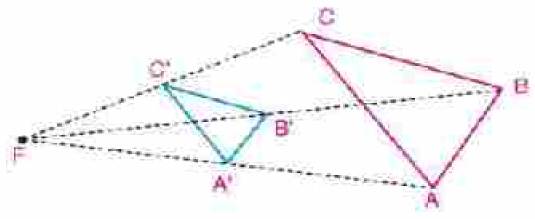


La figure A'B'C'D' est un agrandissement de la figure ABCD. Le rapport $k = 2$ et on a :

$A'B' = 2AB$, $B'C' = 2BC$

$C'D' = 2CD$ et $D'A' = 2DA$

B $\frac{A'B'}{AB} = K = \frac{1}{2}$



Le triangle A'B'C' est une réduction du triangle ABC. Le rapport $k = \frac{1}{2}$ et on a :

$A'B' = \frac{1}{2} AB$ et $B'C' = \frac{1}{2} BC$

$C'A' = \frac{1}{2} CA$

C **Dans la figure ci-contre,** $k = -\frac{1}{2} < 0$

On a $A' \in \overrightarrow{AO}$, $A' \notin \overline{AO}$,

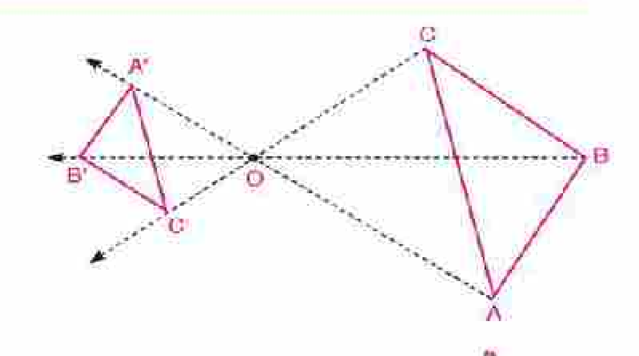
$B' \in \overrightarrow{BO}$, $B' \notin \overline{BO}$

$C' \in \overrightarrow{CO}$, $C' \notin \overline{CO}$

où $A'B' = |-\frac{1}{2}|\ AB = \frac{1}{2}\ AB$

$B'C' = |\frac{1}{2}|\ BC = \frac{1}{2}\ BC$

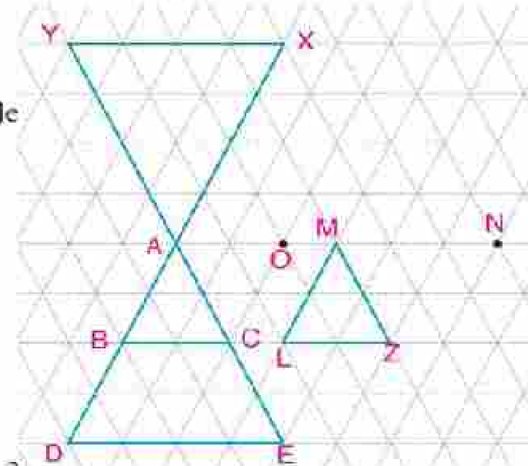
$C'A' = |-\frac{1}{2}|\ CA = \frac{1}{2}\ CA$



Découvre

4 Sur le papier triangulé ci-contre, découvre le centre et le rapport d'homothétie qui rend:

- **A** $\triangle$ ABC image de $\triangle$ ADE
- **B** $\triangle$ MZL image de $\triangle$ AED
- **C** $\triangle$ AXY image de $\triangle$ ABC
- **D** $\triangle$ MZL image de $\triangle$ AYX
- **E** $\triangle$ AED image de $\triangle$ AYX



5 Soit ABCD un rectangle de dimensions 2 et 3

A tés de longueur.

Calcule les dimensions du rectangle A'B'C'D' l'image du rectangle ABCD par l'homothétie de rapport k.

B Calcule le rapport $\frac{A\ (\text{rectangle } A'\ B'\ C'\ D')}{A\ (\text{rectangle } AB\ CD)}$ Que remarques-tu?

Tu as peut-être remarqué que : L'aire de l'image d'une figure par une homothétie de rapport $k = k^2 \times$ l'aire de la figure d'origine

Si l'aire d'un polygone est 245 cm², calcule le coefficient de l'homothétie sachant que l'aire de son image par l'homothétie est :

A 980cm² **B** 5cm² **C** 180cm²

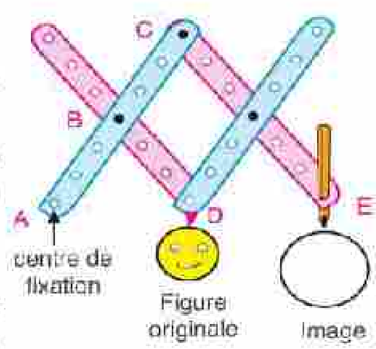
Fabrique toi-même Pantographe

Matériel : 4 règles graduées – perceuse – visses – crayon – clou à bout pointu

Etapes : **1-** Perce les règles dans les lieux de graduation puis fixe les visses, le clou à bout pointu et le crayon comme l'indique la figure.

2- Fait bouger le pantographe pour rendre $\frac{AC}{AB} = k$

3- en déplaçant le bout D sur la figure originale, le bout E dessine son image par une homothétie de rapport k.



Résumé de l'unité

Polygones semblables

Deux polygones ayant le même nombre de côtés sont semblables si leurs angles correspondants sont superposables et leurs côtés correspondants ont des longueurs proportionnelles.

Rapport de similitude

Si polygone A'B'C'D' ~ polygone ABCD et si k est le rapport de similitude,
alors $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{A'D'}{AD} = k$ où $k \neq 0$

Le rapport entre les périmètres de deux polygones semblables est égal au rapport de similitude.

Rectangle d'or

C'est un rectangle dont la longueur est inférieure au double de la largeur et qu'on peut partager en un carré et un rectangle semblable au rectangle d'origine.

Rapport d'or

Le rapport entre la longueur d'un rectangle d'or et sa largeur est environ 1,618 : 1

Axiome : C'est une proposition mathématique considérée comme évidente en soi, sans démonstration, sur laquelle d'autres connaissances peuvent être construites dans un modèle. Par exemple :
« Deux triangles ayant deux paires d'angles correspondants superposables sont semblables ».

Corollaire (1): Si une droite parallèle à un côté d'un triangle coupe les deux autres côtés ou les droites qui les contiennent, alors le triangle formé est semblable au triangle initial.

Corollaire (2): La perpendiculaire issue du sommet de l'angle droit dans un triangle rectangle sur l'hypoténuse partage le triangle en deux triangles semblables et chacun des deux triangles obtenus est semblable au triangle initial.

Théorème 1: Si les longueurs des côtés correspondants de deux triangles sont proportionnelles, alors ces deux triangles sont semblables.

Théorème 2: Si deux triangles ont deux paires de côtés de longueurs proportionnelles et si les angles compris entre ces deux côtés ont même mesure, alors les deux triangles sont semblables.

Relation entre les aires de deux polygones semblables :

Théorème 3: Le rapport des aires de deux triangles semblables est égal au carré du rapport des longueurs de deux côtés correspondants.

Corollaire : Deux polygones semblables peuvent être partagés en un même nombre de triangles deux à deux semblables.

Théorème 4: Le rapport des aires de deux polygones semblables est égal au carré du rapport des longueurs de deux côtés correspondants.



Le temple de Hatshepsout à Louxor

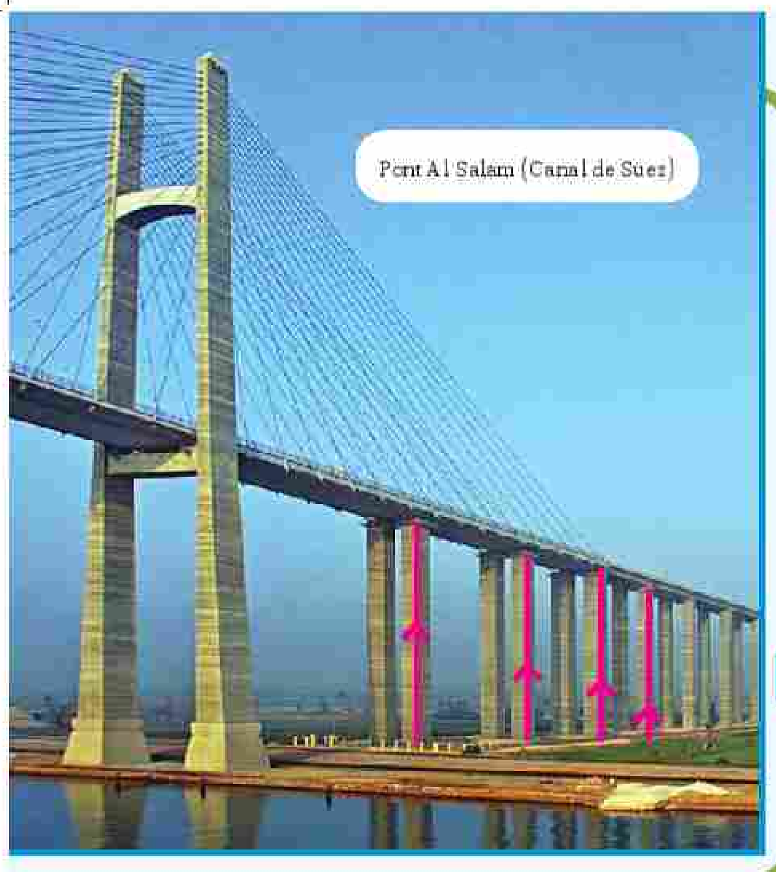
Objectifs de l'unité

Après l'étude de l'unité, l'élève devra être capable de :

- Identifier et démontrer le théorème d'énoncé « Si une droite est parallèle à un côté d'un triangle, elle découpe les deux autres côtés en segments de longueurs proportionnelles », sa réciproque et ses corollaires.
- Identifier et démontrer le théorème de Thalès d'énoncé « Des parallèles découpent sur deux droites des segments de longueurs proportionnelles » et ses cas particuliers
- Identifier et démontrer le théorème d'énoncé «La bissectrice intérieure (ou extérieure) d'un angle d'un triangle partage le côté opposé intérieurement (ou extérieurement) en deux segments dont le rapport des longueurs est égal au rapport des longueurs des deux autres côtés du triangle» et ses cas particuliers.
- Déterminer la puissance d'un point par rapport à un cercle (sécantes et tangentes)
- Déterminer les mesures des angles formés par l'intersection des cordes et de tangentes d'un cercle.
- Résoudre des exercices portant sur la détermination de la longueur d'une bissectrice intérieure ou extérieure.

Expressions de base

- Rapport
- Proportion
- Parallèle
- Milieu
- Médiane
- Sécante
- Bissectrice
- Bissectrice intérieure
- Bissectrice extérieure
- Perpendiculaire à



Pont Al Salam (Canal de Suez)

Leçons de l'unité

Leçon (3 - 1): Droites parallèles et parties proportionnelles.

Leçon (3 - 2): Bissectrice d'un angle et parties proportionnelles.

Leçon (3 - 3): Applications de la proportionnalité dans un cercle.

Matériel utilisé

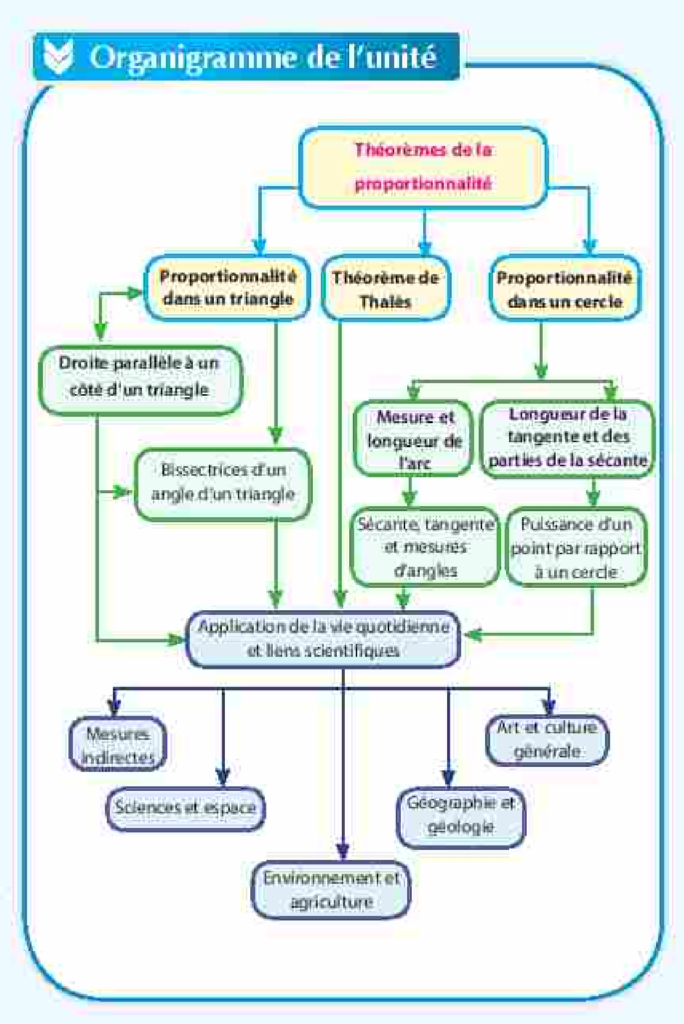
Instruments géométriques pour tracer et pour mesurer – Une calculatrice – Logiciels – Vidéo Projecteur – Papiers quadrillés – Fil – Paire de ciseau

Historique

La mathématique est une activité intellectuelle plaisante qui ouvre et éveille l'esprit. Elle contribue à résoudre des problèmes quotidiens et des défis scientifiques en les représentant et en les modélisant à l'aide du langage mathématique et ses symboles pour les résoudre avant de les remettre dans leurs contextes matériels.

Les Anciens Égyptiens se sont rendu compte de cela et ils ont construit les temples et les pyramides selon des lignes droites, les unes parallèles et les autres qui les coupent. Ils ont labouré les terres agricoles en lignes droites parallèles. Les Grecs ont emprunté la géométrie des Anciens Égyptiens et Euclide (300 av. J.-C) a construit un système géométrique complet. C'est la géométrie euclidienne. Cette géométrie est basée sur cinq axiomes dont le plus important est l'axiome du parallélisme « Par un point extérieur à une droite donnée, ne passe qu'une unique droite qui lui est parallèle ». La géométrie euclidienne traite des formes planes (triangles, polygones, cercles) et des solides. Elle a aussi des applications dans différents domaines : construction de routes, de ponts, urbanisme, élaboration de plans qui repose sur des lignes parallèles et les lignes qui les coupent selon une proportion entre la longueur réelle et la longueur représentée sur le plan (L'échelle).

Organigramme de l'unité



3 - 1 Droites parallèles et parties proportionnelles

A apprendre

- Propriétés d'une droite parallèle à l'un des côtés d'un triangle.
- Utilisation de la proportionnalité pour calculer des longueurs de segments déterminés par des droites parallèles et des sécantes.
- Modélisation et résolution de problèmes de la vie quotidienne incluant des droites parallèles et leurs sécantes.

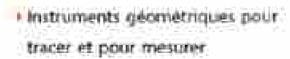
Expressions de base

- Parallèle
- Milieu
- Médiane
- Sécante

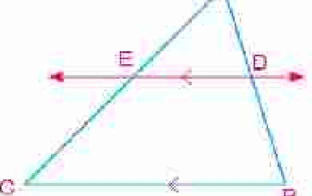
Matériel et moyens



- Instruments géométriques pour tracer et pour mesurer
- Ordinateur
- Logiciels
- Vidéo projecteur







1- Trace un triangle ABC, Détermine un point $D \in \overline{AB}$ puis trace $\overleftrightarrow{DE} \mathbin{//} \overline{BC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en E.

2- Mesure les longueurs de : $\overline{AD}$, $\overline{DB}$, $\overline{AE}$ et $\overline{EC}$

3- Calcule les rapports $\frac{AD}{DB}$ et $\frac{AE}{EC}$, puis compare-les. Que remarques-tu ?

Si on change la position de $\overleftrightarrow{DE}$ en gardant le parallélisme avec $\overline{BC}$, la relation entre $\frac{AD}{DB}$ et $\frac{AE}{EC}$ va-t-elle changer ? Que peux-tu conclure ?



Si une droite est parallèle à un côté d'un triangle, elle découpe les deux autres côtés en segments de longueurs proportionnelles.

Hypothèses : ABC est un triangle et $\overleftrightarrow{DE} \mathbin{//} \overline{BC}$

Conclusion : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

Démonstration : $\because \overleftrightarrow{DE} \mathbin{//} \overline{BC}$

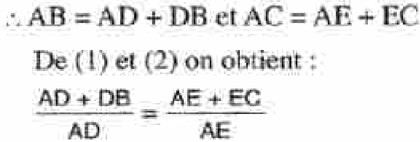
$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE$ (Axiome)

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (1)

$\because D \in \overline{AB}$ et $E \in \overline{AC}$

$\therefore AB = AD + DB$ et $AC = AE + EC$ (2)

De (1) et (2) on obtient :



$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$

D'où : $\frac{AD}{AD} + \frac{DB}{AD} = \frac{AE}{AE} + \frac{EC}{AE}$

$1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$

$\therefore \frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ propriété de la proportionnalité (Ce qu'il fallait démontrer)

Remarque que:

$\because \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$ $\qquad\qquad \therefore \dfrac{AD + DB}{DB} = \dfrac{AE + EC}{EC}$

Donc $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AC}{EC}$

Exemple

1 **Dans la figure ci-contre,** $\overline{XY} \,//\, \overline{BC}$, AX = 16cm, BX = 12cm.

A Si AY = 24cm, trouve YC.

B Si CY = 21cm, trouve AC.



Solution

A $\because \overline{XY} \,//\, \overline{BC}$ $\qquad \therefore \dfrac{AX}{XB} = \dfrac{AY}{YC}$

et $\dfrac{16}{12} = \dfrac{24}{YC}$ $\qquad \therefore YC = \dfrac{12 \times 24}{16} = 18\text{cm}.$

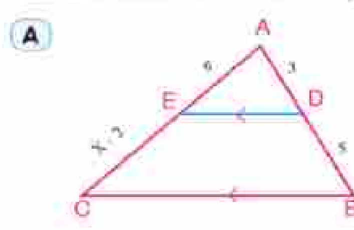
B $\because \overline{XY} \,//\, \overline{BC}$ $\qquad \therefore \dfrac{AB}{BX} = \dfrac{AC}{CY}$

et $\dfrac{16 + 12}{12} = \dfrac{AC}{21}$ $\qquad \therefore AC = \dfrac{28 \times 21}{12} = 49\text{cm}.$

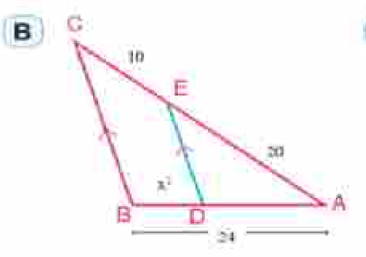
Essaie de résoudre

1 Dans chacune des figures suivantes, $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$. Trouve la valeur numérique de x (les longueurs sont mesurées en centimètres)

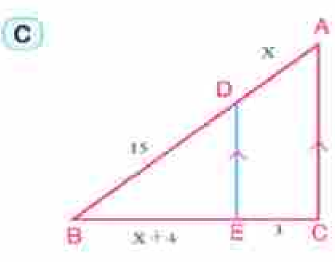
A



B



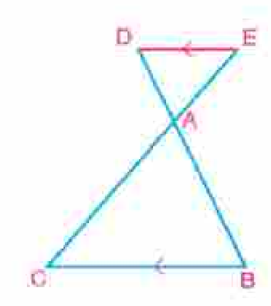
C

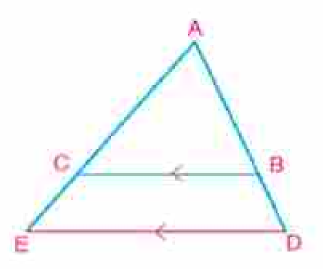


Corollaire **Si une droite extérieure au triangle ABC, parallèle au côté $\overline{BC}$ coupe $\overleftrightarrow{AB}$ et $\overleftrightarrow{AC}$ en D et E respectivement (voir la figure), alors : $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AC}{CE}$.**

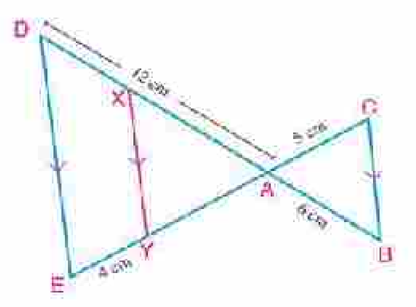
D'après les propriétés des proportions :

$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$, $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{CE}$





Exemple



2 **Dans la figure ci-contre,** $\overline{CE} \cap \overline{BD} = \{A\}$, $X \in \overline{AD}$ et $Y \in \overline{AE}$ où $\overline{XY} \mathbin{/\mkern-5mu/} \overline{BC} \mathbin{/\mkern-5mu/} \overline{DE}$.
Si AB = 6cm, AC = 5cm, AD = 12cm, EY = 4cm. trouve la longueur de $\overline{AE}$ et $\overline{DX}$.

Solution

$\because \overline{ED} \mathbin{/\mkern-5mu/} \overline{BC}$, $\overline{CE} \cap \overline{BD} = \{A\}$

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ d'où $\frac{12}{6} = \frac{AE}{5}$ $\therefore AE = 10cm$

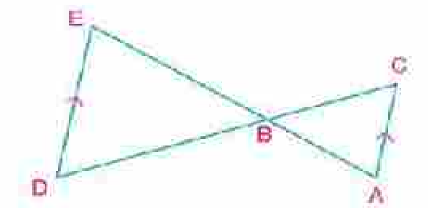
Dans le triangle AED:

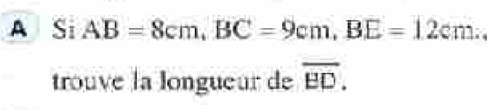
$\because \overline{XY} \mathbin{/\mkern-5mu/} \overline{ED}$ $\therefore \frac{AE}{EY} = \frac{AD}{DX}$

d'où $\frac{10}{4} = \frac{12}{DX}$ $\therefore DX = 4{,}8cm$

Essaie de résoudre

2 **Dans la figure ci-contre,** $\overline{DE} \mathbin{/\mkern-5mu/} \overline{AC}$, $\overline{AE} \cap \overline{CD} = \{B\}$



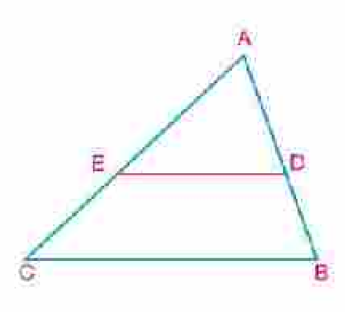


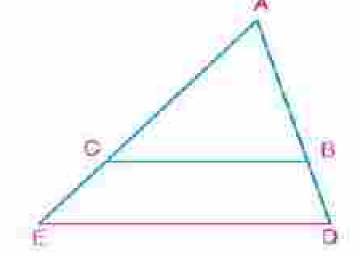
A Si AB = 8cm, BC = 9cm, BE = 12cm.,
trouve la longueur de $\overline{BD}$.

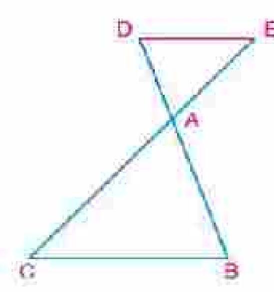
B Si AB = 6cm, BE = 9cm, CD = 18cm.,
trouve la longueur de $\overline{BC}$.



Si une droite coupant deux côtés d'un triangle les partage en segments de longueurs proportionnelles, alors cette droite est parallèle au troisième côté du triangle.







Dans les trois figures précédentes, ABC est un triangle. $\overleftrightarrow{DE}$ coupe $\overleftrightarrow{AB}$ en D et $\overleftrightarrow{AC}$ en E.

$$\text{Si } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ alors } \overleftrightarrow{DE} \mathbin{/\mkern-5mu/} \overleftrightarrow{BC}$$

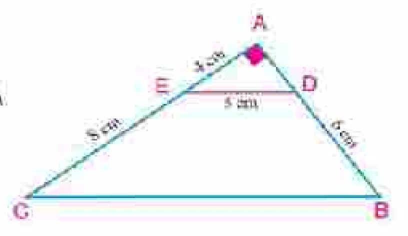
Réflexion logique :

Est-ce que $\triangle ADE \sim \triangle ABC$? Pourquoi ? - Est-ce que $\angle ADE \equiv \angle B$? Explique la réponse.

Démontre la réciproque du théorème.

Exemple

3 **Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle rectangle en A.



A Démontre que : $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

B Trouve la longueur de $\overline{BC}$.

Solution

A $\because$ le triangle ADE est rectangle en A.

$\therefore AD = \sqrt{25 - 16} = 3cm$ (Théorème de Pythagore)

$\because \frac{AD}{DB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{AE}{EC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ d'où $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

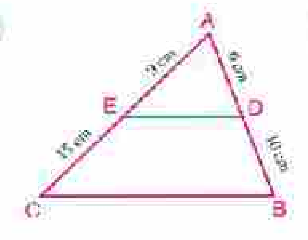
B $\because \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (Pourquoi ?) $\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$

d'où $\frac{5}{BC} = \frac{1}{3}$ $\therefore BC = 15cm$

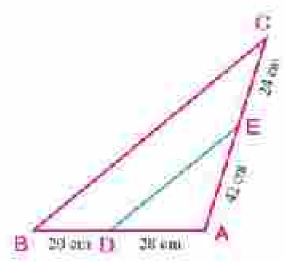
Essaie de résoudre

3 Dans chacune des figures suivantes, détermine si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ou non ?

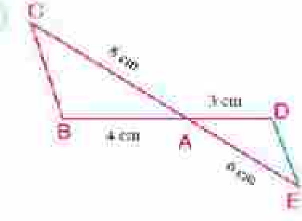
A



B



C



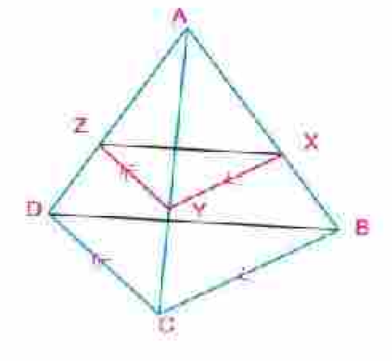
Exemple

4 ABCD est un quadrilatère $X \in \overline{AB}$ et $Y \in \overline{AC}$ tels que $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$.

On trace $\overline{YZ} \parallel \overline{CD}$ qui coupe $\overline{AD}$ en Z. Démontre que $\overline{XZ} \parallel \overline{BD}$.

Solution





Dans le triangle ABC :

$\because \overline{XY} \parallel \overline{BC}$ $\therefore \frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}$ (1)

Dans le triangle ADC :

$\because \overline{YZ} \parallel \overline{CD}$ $\therefore \frac{AZ}{ZD} = \frac{AY}{YC}$ (2)

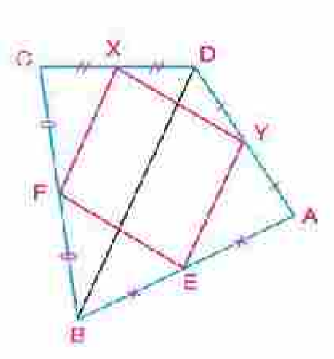
De (1) et (2) on a : $\frac{AX}{XB} = \frac{AZ}{ZD}$

Dans le triangle ABD :

$\because \frac{AX}{XB} = \frac{AZ}{ZD}$ $\therefore \overline{XZ} \parallel \overline{BD}$

Essaie de résoudre

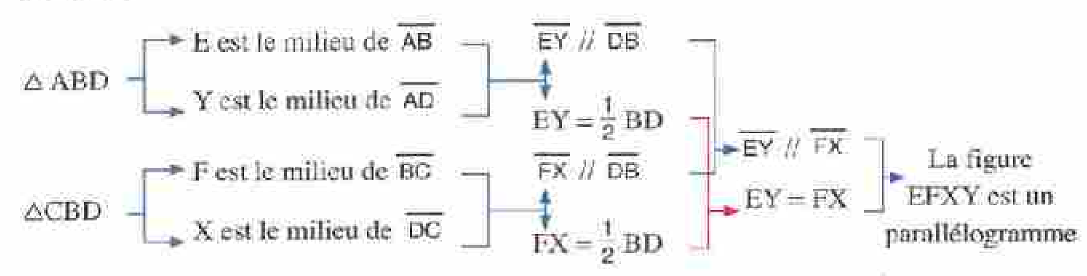
4 Soit ABCD un quadrilatère dont les diagonales se coupent en M. On trace $\overrightarrow{ME}$ // $\overline{AD}$ qui coupe $\overline{AB}$ en E. On trace $\overrightarrow{MF}$ // $\overline{DC}$ qui coupe $\overline{BC}$ en F. Démontre que : $\overline{EF}$ // $\overline{AC}$



Réflexion logique : Soit ABCD un quadrilatère. E, F, X et Y sont respectivement les milieux des côtés $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ et $\overline{DA}$. La figure EFXY est-il un parallélogramme ?.

Pour comprendre : Quelle est la conclusion ? Comment peut-on identifier qu'une figure est un parallélogramme ?

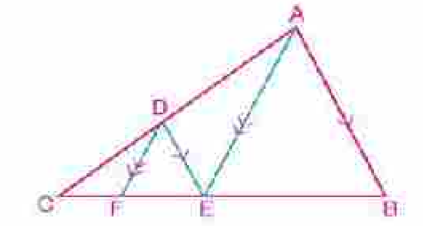
Pour planifier : Trace $\overline{BD}$ qui partage le quadrilatère ABCD en deux triangles.



Pour résoudre : Écris les expressions mathématiques convenables pour la démonstration en les justifiant.

Pour vérifier : A - t - on $\overline{EF}$ // $\overline{XY}$? Explique ta réponse.

Essaie de résoudre

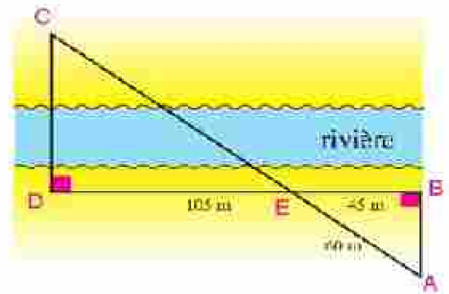


5 Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle , D ∈ $\overline{AC}$,
$\overline{DE}$ // $\overline{AB}$ et $\overline{DF}$ // $\overline{AE}$

Dessine un diagramme qui illustre comment démontrer que $(CE)^2 = CF \times CB$.



5 **GPS:** Pour déterminer le lieu C,
les géomètres ont mesuré et préparé le schéma ci-contre.
Calcule la distance entre les deux lieux C et A



Solution

$\overline{AB} \perp \overline{BD}$, $\overline{CD} \perp \overline{BD}$ $\quad \therefore \overline{AB} \,//\, \overline{CD}$

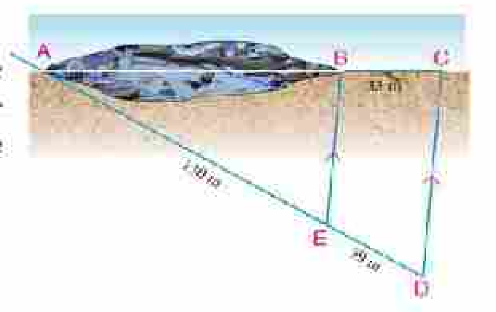
$\because \overline{AC} \cap \overline{BD} = \{E\}$, $\quad \overline{AB} \,//\, \overline{CD}$

$\therefore \frac{EA}{AC} = \frac{EB}{BD}$ $\qquad$ Donc $\frac{60}{AC} = \frac{45}{45 + 105}$

$\therefore AC = \frac{60 \times 150}{45} = 200$ mètres.

Essaie de résoudre

6 **Lutter contre la pollution** : Une équipe de lutte contre la pollution a localisé une nappe de pétrole sur une plage comme l'indique la figure ci-contre. Calcule la longueur de la nappe.





Tu as peut être remarqué la possibilité d'utiliser le parallélisme d'une droite à l'un des côtés d'un triangle dans des applications de la vie quotidienne. La figure ci contre montre le portail d'une pépinière formée par des morceaux de bois parallèles et d'autres qui lui sont sécantes.

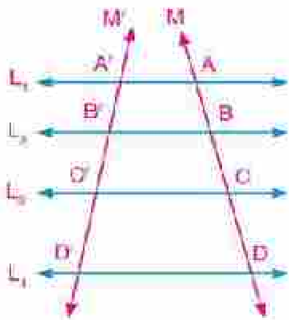


Y a-t-il une relation entre les longueurs des parties déterminées sur les sécantes de ces morceaux parallèles ?

Modélisation

Pour chercher l'existence d'une relation, modélise le problème (pose un modèle mathématique du problème) comme suit :

1- Trace les droites L_1, L_2, L_3, L_4, M, M' telles que $L_1 // L_2 // L_3 // L_4$ puis trace les deux droites M et M' qui coupent les droites parallèles en A, B, C, D, A', B', C', D' respectivement comme l'indique la figure ci-contre.



2- Mesure les longueurs des segments, puis compare les rapports suivants :

$\frac{AB}{A'B'}$, $\frac{BC}{B'C'}$, $\frac{CD}{C'D'}$, $\frac{AC}{A'C'}$, ...

Que peux-tu déduire ?

Théorème de Thalès

Théorème 2 **Des droites parallèles découpent sur deux droites sécantes des segments homologues de longueurs proportionnelles.**

Hypothèses : $L_1 // L_2 // L_3 // L_4$ et M et M' sont deux droites qui les coupent

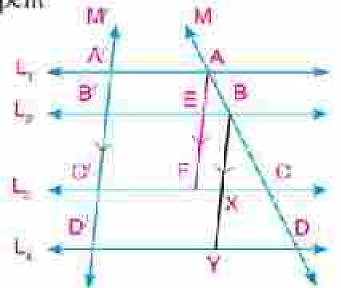
Conclusion : AB : BC : CD = A'B' : B'C' : C'D'

Démonstration : Trace $\overrightarrow{AF}$ // M' qui coupe L_2 en E et L_3 en F

Trace $\overrightarrow{BY}$ // M' qui coupe L_2 en X et L_4 en Y

$\therefore \overline{AA'} // \overline{EB'}$, $\overline{AE} // \overline{A'B'}$

$\therefore$ AEB'A' est un parallélogramme d'où AE = A'B'



De même : EF = B`C` , BX = B` C` , XY = C`D`

Dans le triangle ACF:

$\because \overline{BE} \,/\!/\, \overline{CF}$ $\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EF}$

Donc : $\frac{AB}{BC} = \frac{A`B`}{B`C`}$, $\frac{AB}{A`B`} = \frac{BC}{B`C`}$ (permutation des moyens) (1)

De même, dans le triangle BDY:

$\therefore \frac{BC}{CD} = \frac{B`C`}{C`D`}$, $\frac{BC}{B`C`} = \frac{CD}{C`D`}$ (permutation des moyens) (2)

De (1) et (2), on obtient :

$$\frac{AB}{A`B`} = \frac{BC}{B`C`} = \frac{CD}{C`D`}$$

$\therefore$ AB : BC : CD = A`B` : B`C` : C`D` Ce qu'il fallait démontrer.

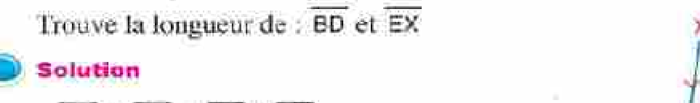
Essaie de résoudre



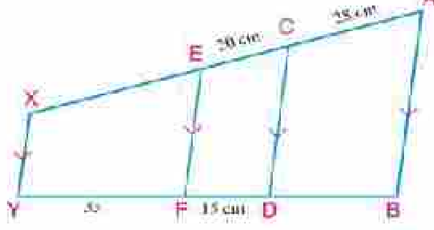
7) Dans la figure précédente, écris ce que vaut chacun des rapports suivants :

A $\frac{AC}{CD}$ **B** $\frac{AC}{CB}$ **C** $\frac{BD}{DA}$ **D** $\frac{A`D`}{A`B`}$ **E** $\frac{AB}{A`B`}$

Exemple



6) **Dans la figure ci-contre :** $\overline{AB} \,/\!/\, \overline{CD} \,/\!/\, \overline{EF} \,/\!/\, \overline{XY}$,
AC = 28cm, CE = 20cm, DF = 15cm, FY = 33cm.
Trouve la longueur de : $\overline{BD}$ et $\overline{EX}$



Solution



$\because \overline{AB} \,/\!/\, \overline{CD} \,/\!/\, \overline{EF} \,/\!/\, \overline{XY}$

$\therefore \frac{AC}{BD} = \frac{CE}{DF} = \frac{EX}{FY}$

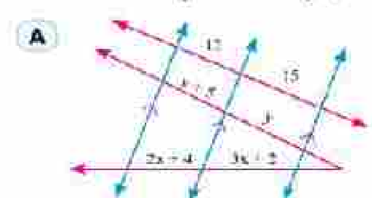
$\frac{28}{BD} = \frac{20}{15} = \frac{EX}{33}$

$\therefore$ BD = 21cm , EX = 44cm.

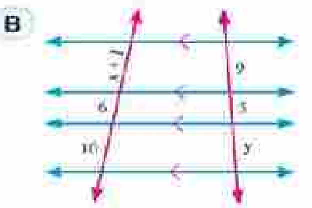
Essaie de résoudre

8) Dans chacune des figures suivantes, les droites rouges coupent des droites parallèles. Calcule la valeur numérique de x et y. (Les longueurs sont mesurées en centimètres) :

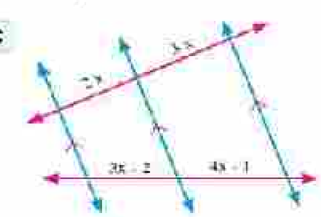
A



B



C



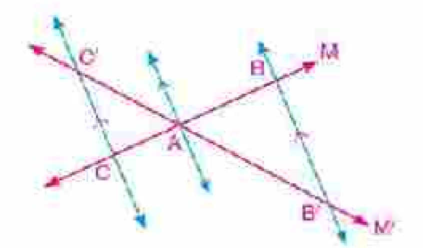
Cas particuliers

1- Si les droites M et M' se coupent en A

et si $\overleftrightarrow{BB'}$ // $\overleftrightarrow{CC'}$, alors $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$

Et réciproquement si : $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$

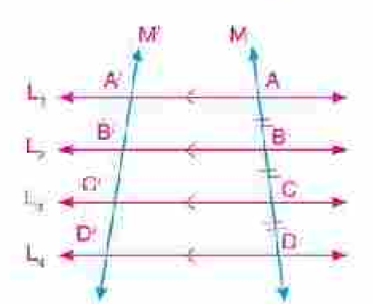
alors : $\overleftrightarrow{BB'}$ // $\overleftrightarrow{CC'}$



Cas particulier du théorème de Thalès

2- Si des droites parallèles partagent une droite en segments de même longueur, alors elles partagent toute autre droite en segments de même longueur.

Dans la figure ci-contre, L_1 // L_2 // L_3 // L_4 **et les droites M et M' les coupent.** Si AB = BC = CD , alors A'B' = B'C' = C'D'





7 **Dans la figure ci-contre , trouve la valeur numérique de x et y.**

Solution

$\because \overline{AB}$ // $\overline{CD}$ // $\overline{EF}$, BD = DF

$\therefore$ AC = CE

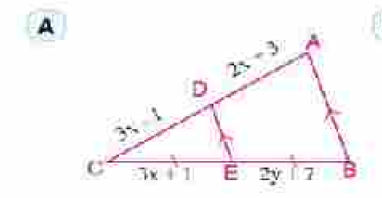
Donc: 2x - 3 = x + 2 $\quad \therefore$ x = 5

$\because$ BD = DF , x = 5 $\quad \therefore$ y + 3 = 5 + 1 $\quad \therefore$ y = 3

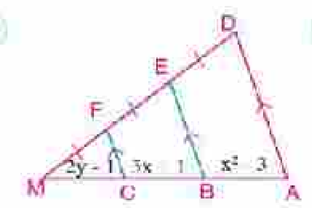
Essaie de résoudre

9 Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur numérique de x et y. (Les longueurs sont mesurées en centimètres)

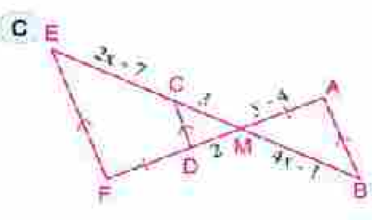
A



B



C



Réfléchis

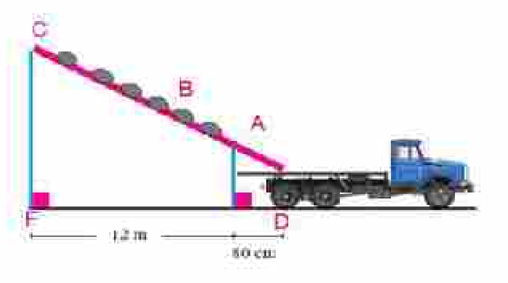
Youssef voulait partager une bande de papier en trois parties de même longueur. Il a posé la bande sur une feuille de son cahier comme l'indique la figure ci-contre, puis il a déterminé les deux points de partage A et B.

Youssef a-t-il bien partagé la bande ? Explique ta réponse.

Utilise tes instruments géométriques pour vérifier ta réponse.

Exemple

8 **Lien avec l'industrie :** On déplace les emballages d'engrais de la production d'une usine en les faisant glisser à travers un tube oblique pour que les camions les transportent aux centres de distribution comme l'indique la figure ci-contre.
Si D, E et F sont respectivement les projections de A, B et C sur le sol, et si AB = 1,2m, D E = 80cm et EF = 12m. Trouver la longueur du tube à un mètre près.



Solution

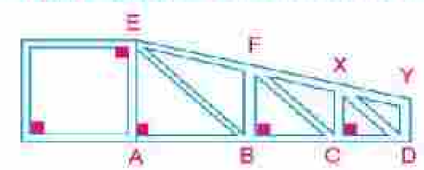
$\because$ D, E et F sont les projections de A, B et C sur l'horizontale, $\therefore \overline{AD} \,//\, \overline{BE} \,//\, \overline{CF}$

$\because \overline{AD} \,//\, \overline{BE} \,//\, \overline{CF}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{DF}$ sont sécantes, $\therefore \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{DF}{DE}$: $\dfrac{AC}{1,2} = \dfrac{12 + 0,8}{0,8}$

Donc $\therefore AC = \dfrac{1,2 \times 12,8}{0,8} = 19,2$ m $\therefore AC \simeq 19$ m

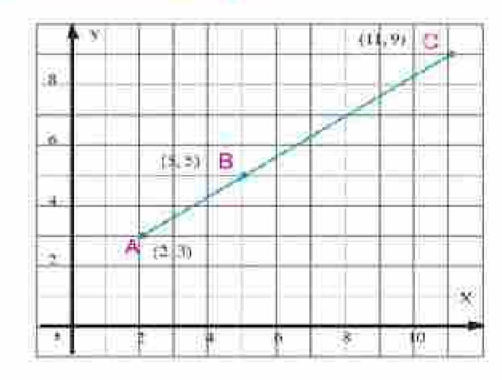
Essaie de résoudre

10 **A** **Lien avec les constructions :**



Si AB = 180cm, EF = 2m
AB : BC : CD = 5 : 4 : 3
Trouve la longueur de $\overline{EY}$,et $\overline{CD}$

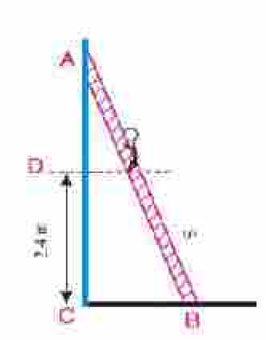
B **Réflexion critique**



Dans la figure, calcule $\dfrac{AB}{BC}$ de différentes manières.
As-tu obtenu le même résultat ?

Test de compréhension

Résolution de problèmes : Une échelle AB de longueur 4,1 mètres repose par son extrémité A sur un mur vertical et par son extrémité B sur un sol horizontal rugueux. Si la distance entre l'extrémité B et le mur est 90 cm, calcule la distance qu'un homme doit monter sur l'échelle pour qu'il soit à une hauteur de 2,4 mètres du sol.



Bissectrice d'un angle et parties proportionnelles

3 - 2

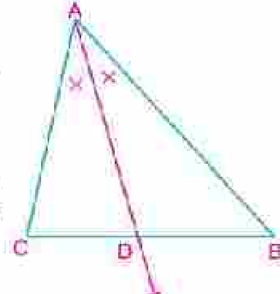


1- Trace un triangle ABC, puis trace $\overrightarrow{AD}$ la bissectrice de l'angle A qui coupe $\overline{BC}$ en D.

2- Mesure $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$.

3- Calcule les rapports $\frac{BD}{DC}$ et $\frac{BA}{AC}$, puis compare-les. Que remarques-tu ?

4- Répète les étapes précédentes plusieurs fois. Qu'est ce que tu en déduis ? Exprime le résultat à ta manière.



A apprendre

- Propriétés des bissectrices des angles d'un triangle.
- Utilisation de la proportionnalité pour calculer les longueurs des segments issus de la bissection des angles.
- Modélisation et résolution de problèmes de la vie quotidienne incluant des bissectrices d'angle d'un triangle.

Bissectrice d'un angle

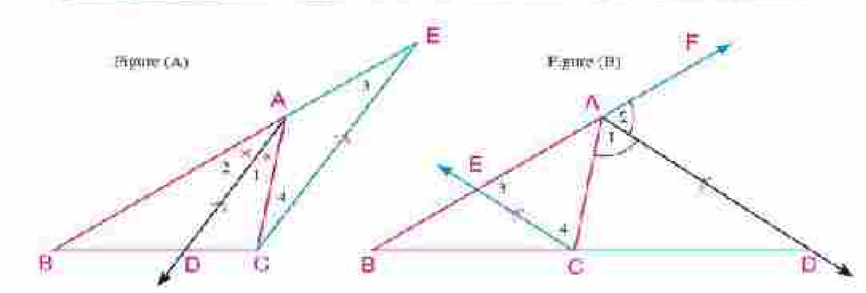
Théorème 3

La bissectrice intérieure d'un angle d'un triangle (ou la bissectrice de l'angle extérieure au triangle en ce sommet) partage le côté opposé intérieurement (ou extérieurement) en deux segments dont le rapport des longueurs est égal au rapport des longueurs des deux autres côtés du triangle.



Expressions de base

- Bissectrice
- Bissectrice intérieure
- Bissectrice extérieure
- Perpendiculaire



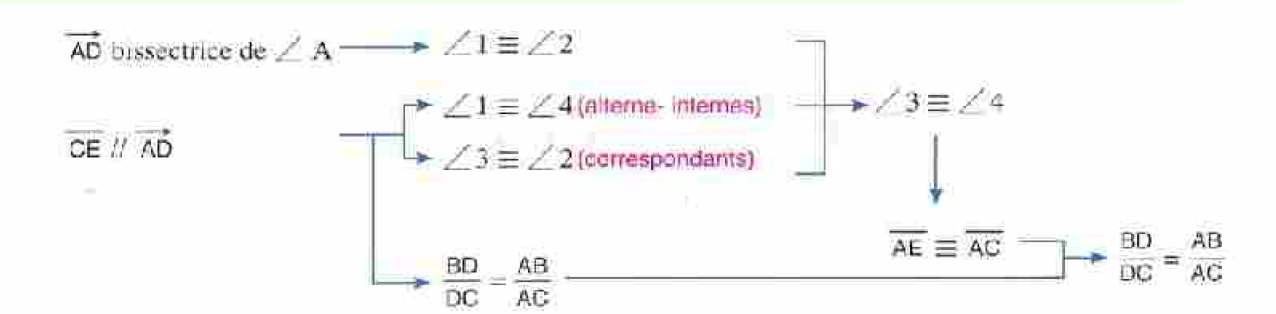
Matériel et moyens

- Instruments géométriques pour tracer
- Ordinateur et logiciels
- Vidéo projecteur

Hypothèses : ABC est un triangle et $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de $\angle BAC$ (fig (A) $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de l'angle extérieure au sommet A fig (B))

Conclusion : $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

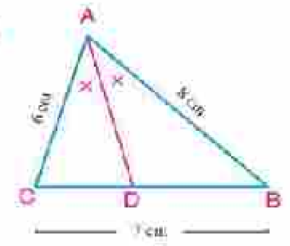
Démonstration : On trace $\overrightarrow{CE}$ // $\overleftrightarrow{AD}$ qui coupe $\overrightarrow{BA}$ en E. Suis le schéma suivant et rédige la démonstration.



Exemple

1 ABC est un triangle tel que AB = 8cm , AC = 6cm et BC = 7cm , On trace $\overrightarrow{AD}$ bissectrice de $\angle$ BAC qui coupe $\overline{BC}$ en D. Trouve la longueur de $\overline{DB}$ et $\overline{DC}$

Solution



$\because \overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de $\angle$ BAC $\quad \therefore \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (theorème)

$\because$ AB = 8cm, A C = 6cm $\quad \therefore \frac{BD}{DC} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$\because$ BC = BD + DC = 7cm $\quad \therefore \frac{DB}{7 - BD} = \frac{4}{3}$ (double produit)

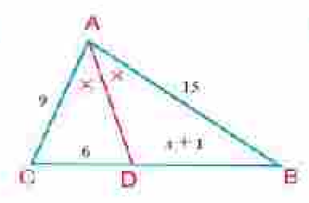
3BD = 28 - 4 BD

7BD = 28 $\quad \therefore$ BD = 4cm , CD = 3cm

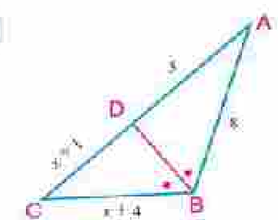
Essaie de résoudre

1 Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur numérique de x (Les longueurs sont mesurées en centimètres)

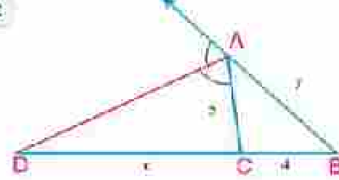




B



C

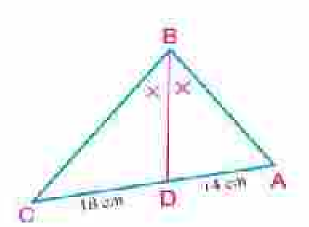


Exemple

2 Soit ABC un triangle. $\overrightarrow{DB}$ est une bissectrice de $\angle$ B qui coupe $\overline{AC}$ en D, où AD = 14cm, AC = 6 cm et DC = 18cm. Si le périmètre du triangle ABC = 80cm, trouve la longueur de : $\overline{BC}$, $\overline{AC}$.



Solution



Dans le triangle ABC

$\because \overrightarrow{BD}$ est une bissectrice de $\angle$ B

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$

$\because$ le périmètre du triangle ABC = 80cm, AC = 14 + 18 = 32cm

$\therefore$ AB + BC = 80 - 32 = 48cm

$\because \frac{AB}{BC} = \frac{7}{9}$ $\therefore \frac{AB + BC}{BC} = \frac{7 + 9}{9}$ (propriété de la proportionnalité)

Donc $\frac{48}{BC} = \frac{16}{9}$ $\therefore BC = 27cm$, $AB = 21cm$

Essaie de résoudre

2 Soit ABC un triangle rectangle en B. On trace $\overrightarrow{AD}$ bissectrice de $\angle A$, qui coupe $\overline{BC}$ en D. Si la longueur de $\overline{BD}$ = 24cm, BA : AC = 3 : 5 , trouve le périmètre du triangle ABC.

Remarques importantes

1- Dans un triangle ABC où AB ≠ AC.

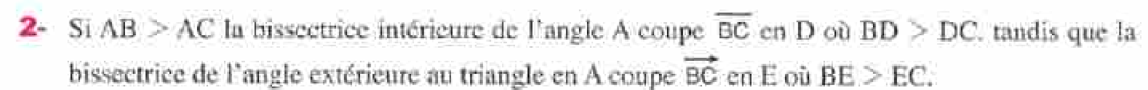
si $\overrightarrow{AD}$ est la bissectrice de $\angle BAC$,

et si $\overrightarrow{AE}$ bissectrice de l'angle extérieur au triangle en A.

alors : $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$, $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC}$

d'où $\frac{DB}{DC} = \frac{BE}{EC}$

Donc $\overline{BC}$ est partagé intérieurement et extérieurement dans un même rapport et les deux bissectrices dans ce cas sont perpendiculaires. (Pourquoi ?)



2- Si AB > AC la bissectrice intérieure de l'angle A coupe $\overline{BC}$ en D où BD > DC. tandis que la bissectrice de l'angle extérieure au triangle en A coupe $\overrightarrow{BC}$ en E où BE > EC.

Réflexion critique

- Si AC augmente, que se passe-t-il pour le point D ?
- Si AC = AB , où se trouve le point D ? Quelle est la position de $\overrightarrow{AE}$ par rapport à $\overline{BC}$ dans ce cas ?
- Si AC > AB, quelle est la relation entre DC et DB ? Où se trouve le point E dans ce cas ? Compare ta réponse avec les réponses de tes camarades

Exemple

3 Soit ABC un triangle tel que AB = 6 cm, AC = 4 cm et BC = 5cm. Trace $\overrightarrow{AD}$ bissectrice intérieure de $\angle A$ qui coupe $\overline{BC}$ en D. Trace $\overrightarrow{AE}$ bissectrice de l'angle extérieure au triangle A qui coupe $\overrightarrow{BC}$ en E. Calcule la longueur de $\overline{DE}$.



Solution

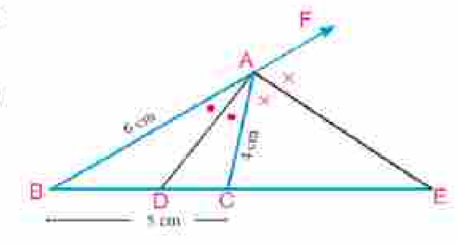
$\because$ $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice intérieure de $\angle A$ et $\overrightarrow{AE}$ est une de l'angle bissectrice extérieure au triangle en $\angle A$.

$\therefore$ D et E partagent $\overline{BC}$ intérieurement et extérieurement dans un même rapport.

Donc : $\frac{BD}{DC} = \frac{BE}{EC} = \frac{BA}{AC}$

$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BE}{EC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\because BC = BD + DC = 5$, $BE - EC = BC = 5$



D'après les propriétés de la proportionnalité, on obtient

$\frac{BD + DC}{DC} = \frac{3+2}{2}$ $\qquad$ $\frac{5}{DC} = \frac{5}{2}$ $\quad \therefore DC = 2$

$\frac{BE - EC}{EC} = \frac{3-2}{2}$ $\qquad$ $\frac{5}{EC} = \frac{1}{2}$ $\quad \therefore EC = 10$

Donc on obtient DE = DC + CE $\qquad$ DE = 2 + 10 = 12cm

Essaie de résoudre

3 Soit ABC un triangle tel que AB = 3cm, BC = 7cm et CA = 6cm. Trace $\overrightarrow{AD}$ bissectrice intérieure de $\angle$A qui coupe $\overline{BC}$ en D. Trace $\overline{AE}$ bissectrice de l'angle extérieure de $\angle$A qui coupe $\overrightarrow{CB}$ en E.

A Démontre que $\overline{AB}$ est une médiane dans le triangle ACE.

B Trouve le rapport entre l'aire du triangle ADE et l'aire du triangle ACE.

Calcul de la longueur de la bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure d'un angle d'un triangle

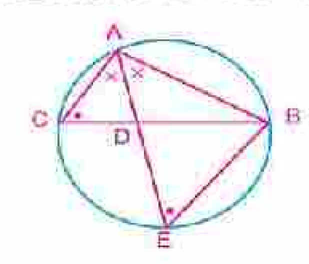


Si $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice intérieure de $\angle$A dans un triangle ABC qui coupe $\overline{BC}$ en D alors : $AD = \sqrt{AB \times AC - BD \times DC}$

Hypothèses : ABC est un triangle et $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice intérieure de $\angle$ BAC et $\overrightarrow{AD} \cap \overline{BC} = \{D\}$

Conclusion : $(AD)^2 = AB \times AC - BD \times DC$

Démonstration : On trace un cercle passant par les sommets du triangle ABC qui coupe $\overrightarrow{AD}$ en E, puis on trace $\overline{BE}$



On a $\triangle ACD \sim \triangle AEB$ (pourquoi)? d'où $\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AE}$

$\therefore AD \times AE = AB \times AC$

$AD \times (AD + DE) = AB \times AC$

$(AD)^2 = AB \times AC - AD \times DE$

$(AD)^2 = AB \times AC - BD \times DC$

Donc $AD = \sqrt{AB \times AC - BD \times DC}$

Rappel

$AD \times DE = BD \times DC$

Exemple

4 Soit ABC un triangle tel que AB = 27cm et AC = 15cm. Trace $\overrightarrow{AD}$ bissectrice de $\angle$A qui coupe $\overline{BC}$ en D. Si BD = 18cm, calcule la longueur de $\overline{AD}$.

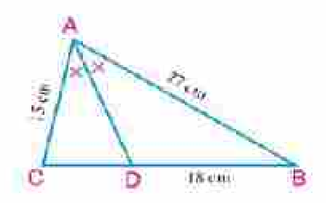
Solution

$\because \overrightarrow{AD}$ est une bissectrice intérieure de $\angle$BAC $\quad \therefore \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

D'où $\frac{18}{DC} = \frac{27}{15}$ $\qquad \therefore DC = 10cm$

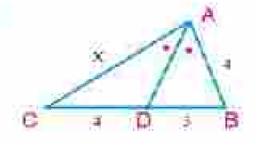
$\because AD = \sqrt{AB \times AC - BD \times DC}$

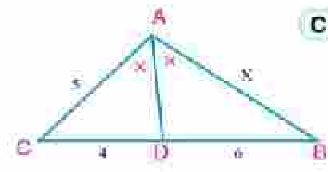
$\therefore AD = \sqrt{27 \times 15 - 18 \times 10} = \sqrt{225} = 15$ cm

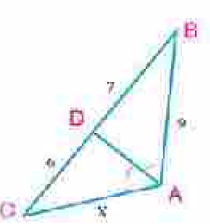


Essaie de résoudre

4) Dans chacune des figures suivantes, calcule la valeur de x et la longueur de $\overline{AD}$ (Les longueurs sont mesurées en centimètres) :

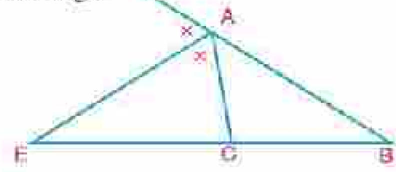
A 

B 

C 

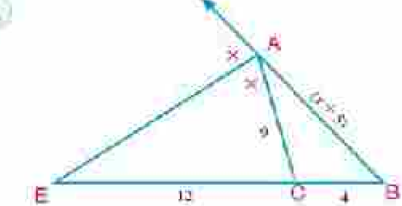
Remarque que: Dans la figure ci-contre, $\overrightarrow{AE}$ est une bissectrice de l'angle extérieure de $\angle$ BAC qui coupe $\overleftrightarrow{BC}$ en E. Donc :

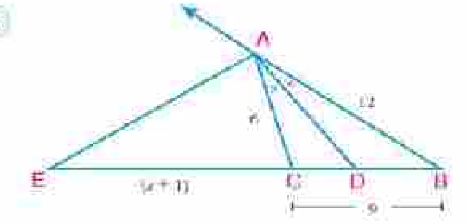
$AE = \sqrt{BE \times EC - AB \times AC}$



Essaie de résoudre

5) Dans chacune des figures suivantes, calcule la valeur de x et la longueur de $\overline{AE}$ (les longueurs sont mesurées en centimètres) :

A 

B 

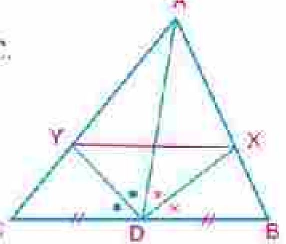
Exemple

5) **Dans la figure ci-contre,** $\overline{AD}$ **est une médiane dans le triangle ABC.**

$\overrightarrow{DX}$ est une bissectrice de $\angle$ADB, qui coupe $\overline{AB}$ en X.

$\overrightarrow{DY}$ est une bissectrice de $\angle$ADC qui coupe $\overline{AC}$ en Y.

Démontre que : $\overline{XY} // \overline{BC}$.



Solution

Dans le triangle ADB: $\because$ $\overrightarrow{DX}$ est une bissectrice de $\angle$ ADB $\quad \therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AX}{XB}$ (1)

Dans le triangle ADC: $\because$ $\overrightarrow{DY}$ est une bissectrice de $\angle$ ADC $\quad \therefore \frac{AD}{DC} = \frac{AY}{YC}$ (2)

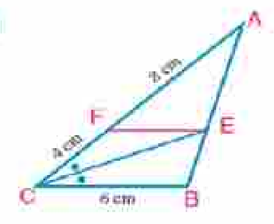
Dans le triangle ABC: $\because$ $\overline{AD}$ est une médiane $\quad \therefore$ DB = DC (3)

De (1), (2) et (3), $\quad \frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}$ $\quad$ d'où $\overline{XY} // \overline{BC}$.

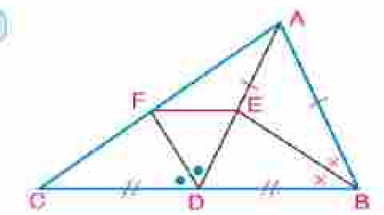
 **Essaie de résoudre**

6 Dans chacune des figures suivantes, démontre que : $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$

A



B



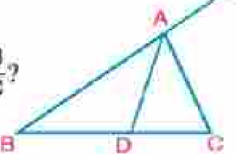
Réflexion logique

Dans la figure ci-contre, D ∈ $\overline{BC}$.

Comment peut-on tracer $\overrightarrow{CE}$ qui coupe $\overrightarrow{BA}$ en E pour calculer le rapport $\frac{DB}{DC}$?

Si $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$, que peux-tu conclure ?



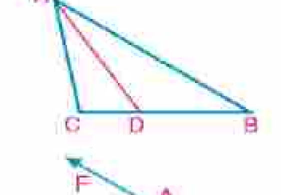


Cas particuliers

1- Dans le triangle ABC:

Si D ∈ $\overline{BC}$ où $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$

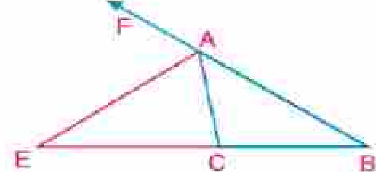
alors : $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de ∠ BAC



Si E ∈ $\overrightarrow{BC}$ et E ∉ $\overline{BC}$ où $\frac{BE}{EC} = \frac{BA}{AC}$

alors: $\overrightarrow{AE}$ est une bissectrice de ∠ A extérieure au triangle ABC

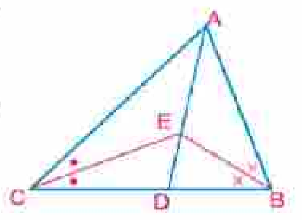
Ce cas est la réciproque du théorème précédent.



2- Dans la figure ci-contre,

$\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont des bissectrices des angles B et C qui se coupent en E où E ∈ $\overrightarrow{AD}$. Que peux-tu conclure ?

Corollaire : Les bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes.



Exemple



6 Soit ABC un triangle tel que AB = 18cm, BC = 15cm et AC = 12cm, D ∈ $\overline{BC}$ où BD = 9cm, On trace $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AD}$ qui coupe $\overrightarrow{BC}$ en E. Démontre que $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de ∠BAC, puis calcule la longueur de $\overline{CE}$.

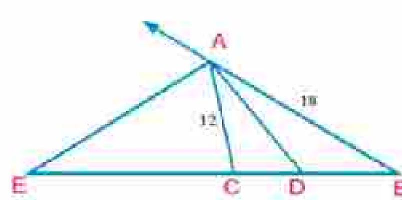
Solution

Dans le triangle ABC: $\frac{AB}{AC} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

CD = BC - BD = 15 - 9 = 6cm

$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

$\because \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de ∠ BAC



$\because \overrightarrow{AE} \perp \overline{AD}$ qui coupe $\overrightarrow{BC}$ en E

$\therefore \overrightarrow{AE}$ est une bissectrice de $\angle$ A extérieur au triangle ABC d'où $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC}$

$\because$ BE = BC + CE $\quad \therefore \frac{15 + CE}{CE} = \frac{18}{12}$, CE = 30cm

Essaie de résoudre

(7) Soit ABCD un quadrilatère tel que AB = 18cm et BC = 12cm. E $\in \overline{AD}$ tel que 2 AE = 3 ED. On trace $\overrightarrow{EF} \,//\, \overline{DC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en F. Démontre que $\overrightarrow{BF}$ est une bissectrice $\angle$ABC.

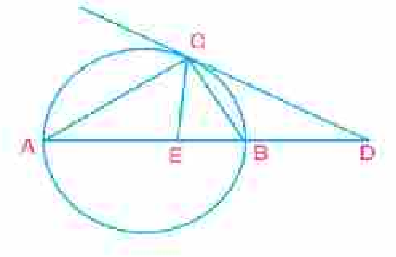

Exemple

(7) Soit $\overline{AB}$ un diamètre dans un cercle et $\overline{AC}$ est une corde. On trace $\overrightarrow{CD}$ tangente au cercle en C qui coupe $\overrightarrow{AB}$ en D.

Si E $\in \overline{AB}$ tel que $\frac{DB}{BE} = \frac{DC}{CE}$ démontre que :

A $\overrightarrow{AC}$ est une bissectrice de l'angle C extérieur au triangle CDE. **B** $\frac{DA}{DB} = \frac{AE}{BE}$

Solution



$\because \frac{DB}{BE} = \frac{DC}{CE}$ (1)

$\therefore \overrightarrow{CB}$ est une bissectrice de $\angle$ C dans le triangle DCE.

$\because \overline{AB}$ un diamètre du cercle

$\therefore$ m ($\angle$ACB)= 90° Donc $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$

$\because \overrightarrow{CB}$ est une bissectrice de $\angle$C dans le triangle ABC

$\therefore \overrightarrow{CA}$ est une bissectrice de $\angle$C extérieur au triangle DCE

(deux bissectrices perpendiculaires) (ce qu'il fallait démontrer en A)

Donc $\frac{DA}{AE} = \frac{DC}{CE}$ (2)

De (1) et (2), on a : $\frac{DA}{AE} = \frac{DB}{BE}$ $\quad \therefore \frac{DA}{AE} = \frac{AE}{BE}$ (ce qu'il fallait démontrer en B)

Essaie de résoudre

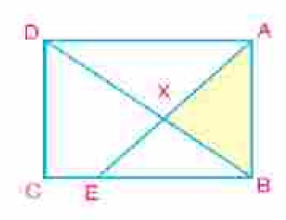
(8) Soient M et N deux cercles tangents extérieurement en A. On trace une droite parallèle à $\overline{MN}$ qui coupe le cercle M en B et C et le cercle N en D et E respectivement. Si $\overrightarrow{BM} \cap \overrightarrow{EN}$ = {F}, démontre que $\overrightarrow{AF}$ est une bissectrice de $\angle$MFN.

Test de compréhension

Résolution de problèmes : **La figure ci-contre** illustre le partage d'un terrain rectangulaire en quatre parties différentes par les deux droites $\overleftrightarrow{BD}$ et $\overleftrightarrow{AE}$, où E $\in \overline{BC}$ et $\overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{AE}$ = {X}.

Si AB = BE = 42 mètres et AD = 56 mètres.

calcule en mètres carrés la superficie de la partie du terrain ABX et la longueur de $\overline{AX}$.



3 - 3 Applications de la proportionnalité dans un cercle



A apprendre



- Trouver la puissance d'un point par rapport à un cercle.
- Déterminer la position d'un point par rapport à un cercle.
- Trouver les mesures des angles formés par l'intersection des cordes et des tangentes dans un cercle.
- Modéliser et résoudre des problèmes de la vie quotidienne incluant la longueur de la bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure d'un angle.

Expressions de base



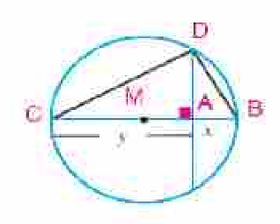
- Puissance d'un point
- Cercle
- Corde
- Tangente
- Sécante
- Diamètre
- Cercles concentriques
- Tangente commune extérieure
- Tangente commune intérieure.

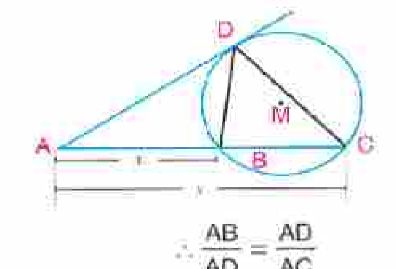
Matériel et moyens

- Instruments géométriques pour tracer et pour mesurer



Comment peut-on construire un segment dont la longueur L est une moyenne proportionnelle entre x et y les longueurs de deux segments donnés ?





$\because \triangle ADB \sim \triangle ACD$ (pourquoi ?) $\quad \therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AC}$

d'où $\frac{x}{L} = \frac{L}{y}$ et par conséquent $L^2 = x \times y$

Donc L est une moyenne proportionnelle entre x et y



Construis des segments de longueurs $\sqrt{3}$, $\sqrt{15}$ et $\sqrt{24}$

Compare tes constructions avec celles de tes camarades, puis vérifie tes réponses en utilisant une calculatrice et un instrument de mesure.

1) Puissance d'un point par rapport à un cercle



La puissance d'un point A par rapport à un cercle M de rayon R est le nombre réel $P_M(A)$ où $P_M(A) = (AM)^2 - R^2$

Remarques importantes

Remarque 1

On peut prévoir la position d'un point A par rapport à un cercle M :

Si : $P_M(A) > 0$, le point A est situé à l'extérieur du cercle.

$P_M(A) = 0$, le point A est situé sur le cercle.

$P_M(A) < 0$, le point A est situé à l'intérieur du cercle.

Exemple

① Détermine la position de chacun des points A, B et C par rapport au cercle M de rayon 5cm, si : $P_M(A) = 11$, $P_M(B) = 0$, $P_M(C) = -16$. Calcule ensuite la distance de chaque point par rapport au centre du cercle.

Solution

$\because P_M(A) = 11 > 0$ $\therefore$ le point A est situé à l'extérieur du cercle

$\because P_M(A) = (AM)^2 - R^2$ $\therefore 11 = (AM)^2 - 25$ $\therefore AM = 6cm$

$\because P_M(B) = 0$ $\therefore$ le point B est situé sur le cercle $\therefore BM = 5cm$

$\because P_M(C) = -16$ $\therefore$ le point C est situé à l'intérieur du cercle.

$\because P_M(C) = (CM)^2 - R^2$ $\therefore -16 = (CM)^2 - 25$ $\therefore CM = 3cm$

Essaie de résoudre

① Détermine la position de chacun des points A, B et C par rapport au cercle N de rayon 3 cm puis calcule la distance de chaque point par rapport au centre du cercle dans chacun des cas suivants:

A $P_N(A) = 15$ **B** $P_N(B) = 0$ **C** $P_N(C) = -4$

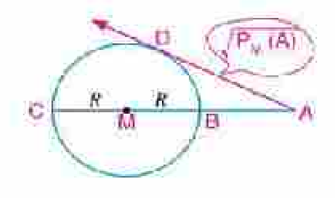
Remarque 2

Si le point A est situé à l'extérieur du cercle M,

alors : $P_M(A) = (AM)^2 - R^2$

$= (AM - R)(AM + R)$

$= AB \times AC = (AD)^2$



$\therefore$ La longueur de la tangente issue du point A au cercle M $= \sqrt{P_M(A)}$

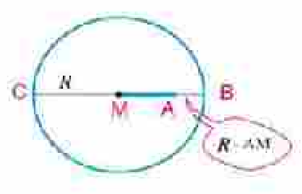
Remarque 3

Si le point A est situé à l'intérieur du cercle M, alors: $P_M(A) = (AM)^2 - R^2$

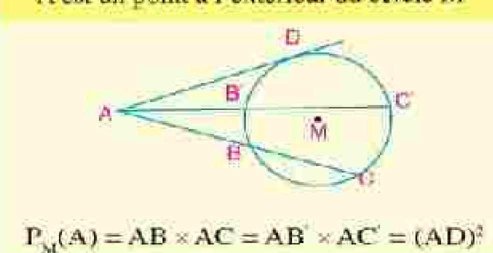
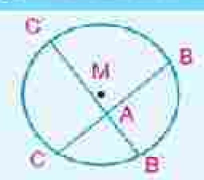
$= (AM - R)(AM + R)$

$= -(R - AM)(AM + R)$

$= -AB \times AC$



En général

A est un point à l'extérieur du cercle M	A est un point à l'intérieur du cercle M
	
$P_M(A) = AB \times AC = AB' \times AC' = (AD)^2$	$P_M(A) = -AB \times AC = -AB' \times AC'$

Exemple

(2) Soit un cercle de centre M et de rayon 31cm. Le point A est situé à 23cm du centre du cercle. On trace la corde $\overline{BC}$ telle que $A \in \overline{BC}$ et AB = 3 AC. Calcule :

A la longueur de la corde $\overline{BC}$

B la distance de la corde $\overline{BC}$ au centre du cercle

Solution

Dans le cercle M:

A $\because$ R = 31cm, AM = 23cm et $A \in \overline{BC}$

$\therefore$ A est situé à l'intérieur du cercle

$P_M(A) = (AM)^2 - R^2 = -AB \times AC$

$(23)^2 - (31)^2 = -3AC \times AC$ $\therefore$ AC = 12cm

$\therefore$ la longueur de la corde $\overline{BC}$ = 4 AC = 4 × 12 = 48cm

B Soit la distance de la corde au centre du cercle = MD où $\overline{MD} \perp \overline{BC}$

$\because \overline{MD} \perp \overline{BC}$ $\therefore$ D est le milieu de $\overline{BC}$, d'où BD = 24cm

$\therefore (MD)^2 = (31)^2 - (24)^2 = 385$ $\therefore MD = \sqrt{385} \simeq 19{,}6$ cm

Essaie de résoudre

(2) Soit un cercle de centre N et de rayon 8 cm. Le point B est situé à 12 cm du centre du cercle. On trace une droite passant par le point B qui coupe le cercle en deux points C et D où CB = CD. Calcule la longueur de la corde $\overline{CD}$ et sa distance par rapport au point N.

Exemple

(3) M et N sont deux cercle sécants en A et B. $C \in \overrightarrow{BA}$ et $C \notin \overline{BA}$. On trace $\overrightarrow{CD}$ qui coupe le cercle M en D et E où CD = 9 cm et DE = 7 cm. On trace $\overrightarrow{CF}$ tangente au cercle N en F.

A Démontre que $P_M(C) = P_N(C)$.

B Si AB = 10cm. trouve la longueur de $\overline{AC}$ et $\overline{CF}$.

Solution

A $\because$ C est situé à l'extérieur du cercle M, $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont sécantes au cercle M.

$\therefore P_M(C) = CD \times CE = CA \times CB$ (1)

$\because$ C est situé à l'extérieur du cercle N, $\overrightarrow{CB}$ est une sécante et $\overline{CF}$ est une tangente au cercle.

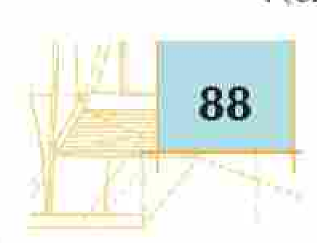
$\therefore P_N(C) = CA \times CB = (CF)^2$ (2)

De (1) et (2), $\therefore P_M(C) = P_N(C) = 9 \times 16 = 144$

B $\because$ AB = 10cm $\therefore P_N(C) = CA\,(CA + 10) = (CF)^2 = 144$

$\because (CA)^2 + 10\,CA = 144 \therefore$ CA = 8cm

$\because (CF)^2 = 144$ $\therefore$ CF = 12cm



Remarques importantes.

L'ensemble des points ayant la même puissance par rapport à deux cercles distincts est appelé l'axe radical aux deux cercles.

Si $P_M(A) = P_N(A)$, **alors** A est un point de l'axe radical aux deux cercles M et N.

Dans l'exemple précédent, on remarque que : $P_M(C) = P_N(C)$, $P_M(A) = P_N(A) =$ zero , $P_M(B) = P_N(B) = 0$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$ est un axe radical aux deux cercles M et N.

Essaie de résoudre

3 M et N sont deux cercle tangents extérieurement en A. $\overleftrightarrow{AB}$ est une tangente commune aux deux cercles. $\overrightarrow{BC}$ coupe le cercle M en C et D et $\overrightarrow{BE}$ coupe le cercle N en E et F respectivement.

A **Démontrer que :** $\overleftrightarrow{AB}$ est un axe radical aux deux cercles M et N .

B Si $P_M(B) = 36$, BC = 4cm et EF = 9cm, **trouve la longueur de** $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ et $\overline{BE}$.

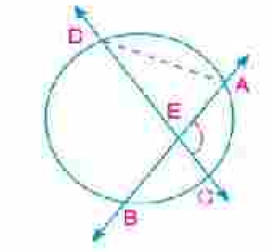
2) Sécante, tangente et mesures d'angles

Tu as déjà étudié que :

1- Si deux sécantes se coupent à l'intérieur d'un cercle, la mesure de l'angle formé par leur intersection est égale à la demi-somme de mesure de l'arc intercepté à cet angle et celle de l'arc intercepté opposé à cet angle

Dans la figure ci contre, $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{E\}$

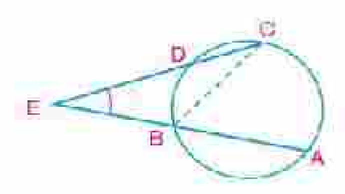
On a: $m(\angle AEC) = \frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{DB})]$



2- Si deux sécantes se coupent à l'extérieur d'un cercle, la mesure de l'angle formé par leur intersection est égale à la demi-différence des mesures des deux arcs intercepte par cet angle.

Dans la figure ci contre: $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{E\}$

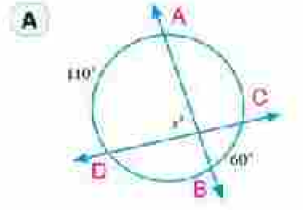
On a : $m(\angle AEC) = \frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{AC}) - m(\overset{\frown}{DB})]$



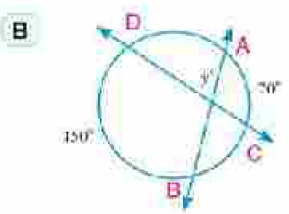
Essaie de résoudre

4 Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur du symbole utilisé pour mesurer l'angle.

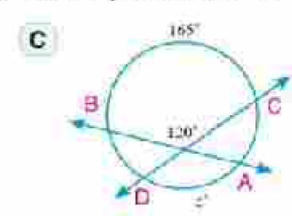
A



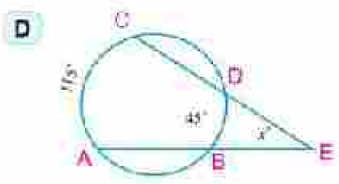
B



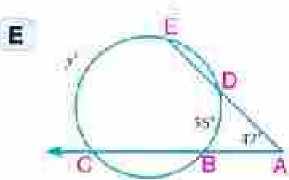
C



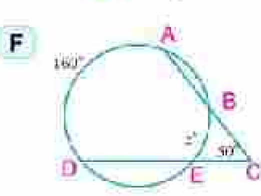
D



E



F



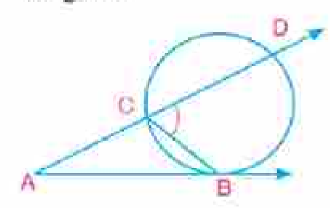
Déduction de la mesure de l'angle formé par l'intersection d'une sécante et d'une tangente (ou par deux tangentes) d'un cercle .



La mesure de l'angle formé par l'intersection d'une sécante et d'une tangente (ou par deux tangentes) qui se coupent à l'extérieur d'un cercle est égale à la demi-différence des mesures des deux arcs intercepte par cet angle.

Démonstration

Premier cas : Intersection d'une sécante et d'une tangente.



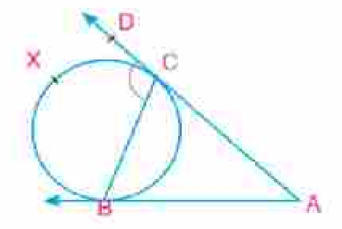
$\because \angle$ DCB est extérieur au triangle ABC

$\therefore m(\angle A) = m(\angle BCD) - m(\angle CBA)$

$= \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{BD}) - \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{BC})$

$= \frac{1}{2} [m(\overset{\frown}{BD}) - m(\overset{\frown}{BC})]$

Deuxième cas : Intersection de deux tangentes.



$\because \angle$ DCB est extérieur au triangle ABC

$\therefore m(\angle A) = m(\angle BCD) - m(\angle CBA)$

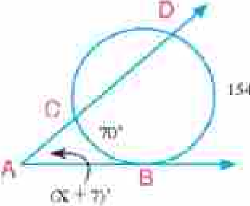
$= \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{BXC}) - \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{BC})$

$= \frac{1}{2} [m(\overset{\frown}{BXC}) - m(\overset{\frown}{BC})]$

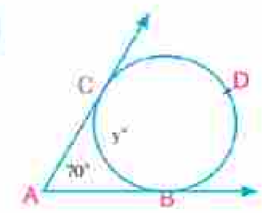
Essaie de résoudre

5 A l'aide des données de chaque figure, trouve la valeur du symbole utilisé pour mesurer l'angle :

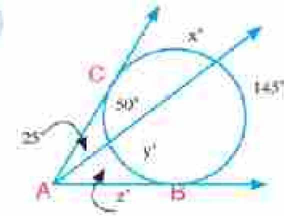
A







C



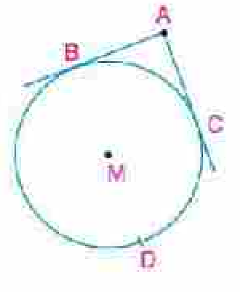
Exemple

4 Liens avec les satellites : Un satellite tourne en orbite gardant une hauteur constante au dessus de l'équateur. Dans le satellite, une caméra peut surveiller un arc de longueur 6011 km sur la surface de la terre. Si la mesure de l'arc est 54° , trouve :

A La mesure de l'angle de la caméra posé sur le satellite.

B La longueur du rayon de la terre à l'équateur.

Solution



Modélisation du problème : Si on considère que le cercle M représente le cercle de l'équateur, on obtient :

m($\overset{\frown}{BC}$) = 54° et la longueur de $\overset{\frown}{BC}$ = 6011km.



A ∵ la mesure du cercle = 360°

∴ m($\overset{\frown}{BDC}$) = 360° - 54° = 306°

Donc m (∠A) $= \frac{1}{2}$ [m($\overset{\frown}{BDC}$) - m($\overset{\frown}{BC}$)]

$= \frac{1}{2}(306° - 54°) = 126°$



B Dans un cercle, la longueur d'un arc est proportionnelle à sa mesure

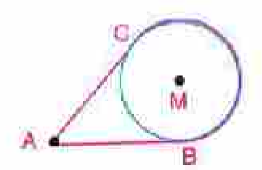
$\frac{6011}{2 \times \pi \times R} = \frac{54°}{360°}$ ∴ R = 6377.87km

∴ la longueur du rayon de la terre à l'équateur ≃ 6378km .



Essaie de résoudre

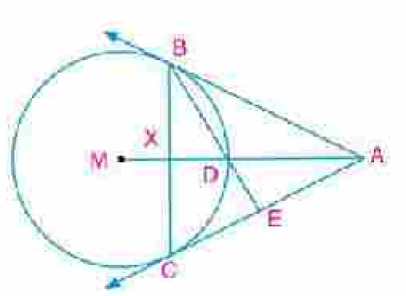
6 Une poulie tourne autour d'un axe M à l'aide d'une courroie passant sur une petite poulie en A. Si la mesure de l'angle entre les deux parties de la courroie est 40°, trouve la longueur du grand arc $\overset{\frown}{BC}$, sachant que la longueur du rayon de la plus grande poulie est 9cm.



7 **Dans la figure ci-contre:** M est un cercle de rayon 9 cm., $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont tangentes au cercle en B et C . $\overline{AM}$ coupe le cercle en D et $\overline{BC}$ en X. On trace $\overrightarrow{BD}$ qui coupe $\overline{AC}$ en E. Si P_M(A) = 144 trouve :

A la longueur de $\overline{AB}$

B la longueur de $\overline{AX}$.

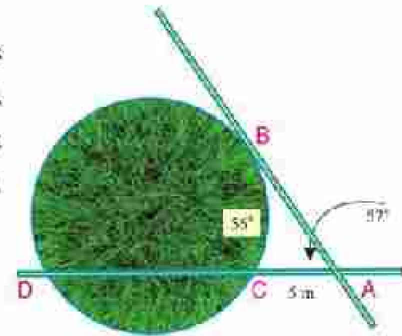


Test de compréhension

Résolution de problèmes : **La figure ci-contre** montre la maquette d'un jardin circulaire. On construit deux passerelles, l'une à l'extérieur du jardin qui lui est tangente en un point B et l'autre le traverse en le coupant en deux points C et D. Les deux passerelles se croisent en A.

Si P_M(A) = 100 et AC = 5 mètres .

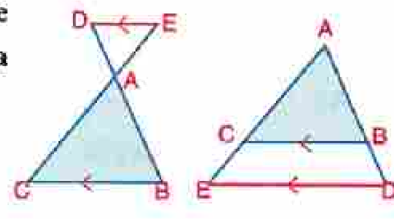
trouve la longueur de $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$, puis calcule m($\overset{\frown}{BD}$).



Résumé de l'unité

Théorème 1: Si une droite est parallèle à un côté d'un triangle, elle découpe les deux autres côtés en segments de longueurs proportionnelles.

Corollaire : Si une droite extérieure au triangle ABC parallèle au côté $\overline{BC}$ coupe $\overleftrightarrow{AB}$ et $\overleftrightarrow{AC}$ **en D et E respectivement (voir la figure), alors**



$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{EC} \quad \Rightarrow \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad ; \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$

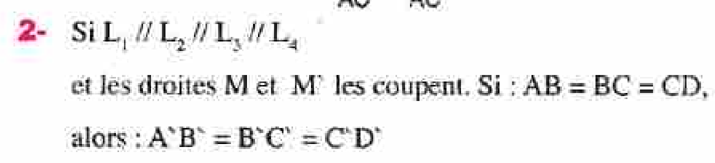
Réciproque du théorème 1: Si une droite coupant deux côtés d'un triangle les partage en segments de longueurs proportionnelles, alors cette droite est parallèle au troisième côté du triangle.

Cas général du théorème de Thalès : Des droites parallèles découpent sur deux droites sécantes des segments homologues de longueurs proportionnelles.

Cas particuliers

1- Si les droites M et M' se coupent en A et si : $\overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$, alors : $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$

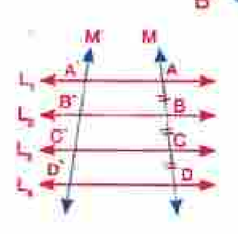
Et réciproquement si : $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$, alors : $\overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$



2- Si $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3 \parallel L_4$

et les droites M et M' les coupent. Si : AB = BC = CD,

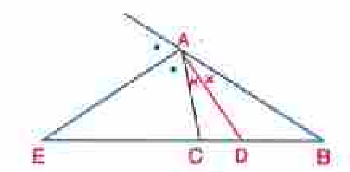
alors : A'B' = B'C' = C'D'



Théorème 3 : Bissectrice d'un angle d'un triangle :

La bissectrice intérieure (ou extérieure) d'un angle d'un triangle partage le côté opposé intérieurement (ou extérieurement) en deux segments dont le rapport des longueurs est égal au rapport des longueurs des deux autres côtés du triangle.

Remarques importantes : Dans la figure ci-contre



1- $\overline{BC}$ est partagé intérieurement en D et extérieurement en E dans un même rapport d'où $\frac{BD}{DC} = \frac{BE}{EC}$

2- La bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure sont perpendiculaires d'où $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AE}$

3- Si AB > AC, la bissectrice intérieure de $\angle$A coupe $\overline{BC}$ en D telle que BD > DC tandis que la bissectrice extérieure de $\angle$A coupe $\overrightarrow{BC}$ en E où BE > EC.

4- $AD = \sqrt{BA \times AC - DB \times DC}$

5- $AE = \sqrt{BE \times EC - BA \times AC}$

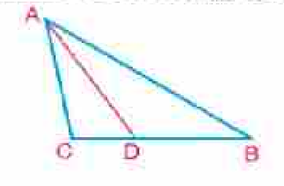
Résumé de l'unité

Cas particulier du théorème 3

1- Dans le triangle ABC:

Si $D \in \overline{BC}$ tel que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$

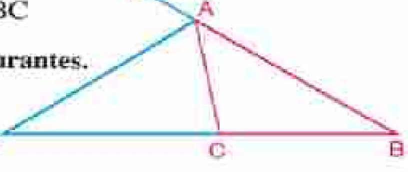
alors , $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de $\angle BAC$



Si $E \in \overleftrightarrow{BC}$ et $E \notin \overline{BC}$, tel que $\frac{BE}{EC} = \frac{BA}{AC}$

alors , $\overrightarrow{AE}$ est une bissectrice de $\angle A$ extérieure au triangle $\triangle ABC$

2 - Corollaire : Les bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes.



1) Puissance d'un point par rapport à un cercle

La puissance d'un point A par rapport à un cercle M de rayon R est le nombre réel $P_M(A)$ où :

$P_M(A) = (AM)^2 - R^2$

Si $P_M(A) > 0$, le point A est situé à l'extérieur du cercle.

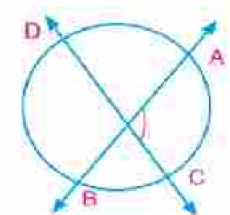
Si $P_M(A) = 0$, le point A est situé sur le cercle.

Si $P_M(A) < 0$, le point A est situé à l'intérieur du cercle

2) Sécante, tangente et mesure d'angle

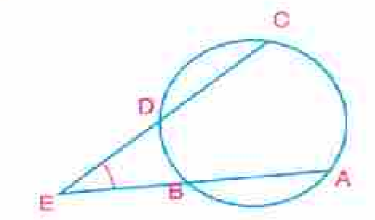
1- Mesure de l'angle formé par l'intersection de deux sécantes d'un cercle :

A à l'intérieure du cercle



$m(\angle AEC) = \frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{DB})]$

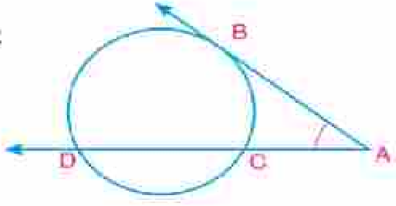
B à l'extérieure du cercle



$m(\angle AEC) = \frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{AC}) - m(\overset{\frown}{DB})]$

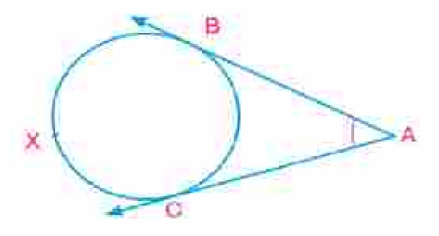
2- Mesure de l'angle formé par l'intersection d'une sécante et d'une tangente d'un cercle :

$m(\angle A) = \frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{BD}) - m(\overset{\frown}{BC})]$



3- Mesure de l'angle formé par l'intersection de deus tangentes d'un cercle :

$m(\angle A) = \frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{BXC}) - m(\overset{\frown}{BC})]$





Trigonométrie

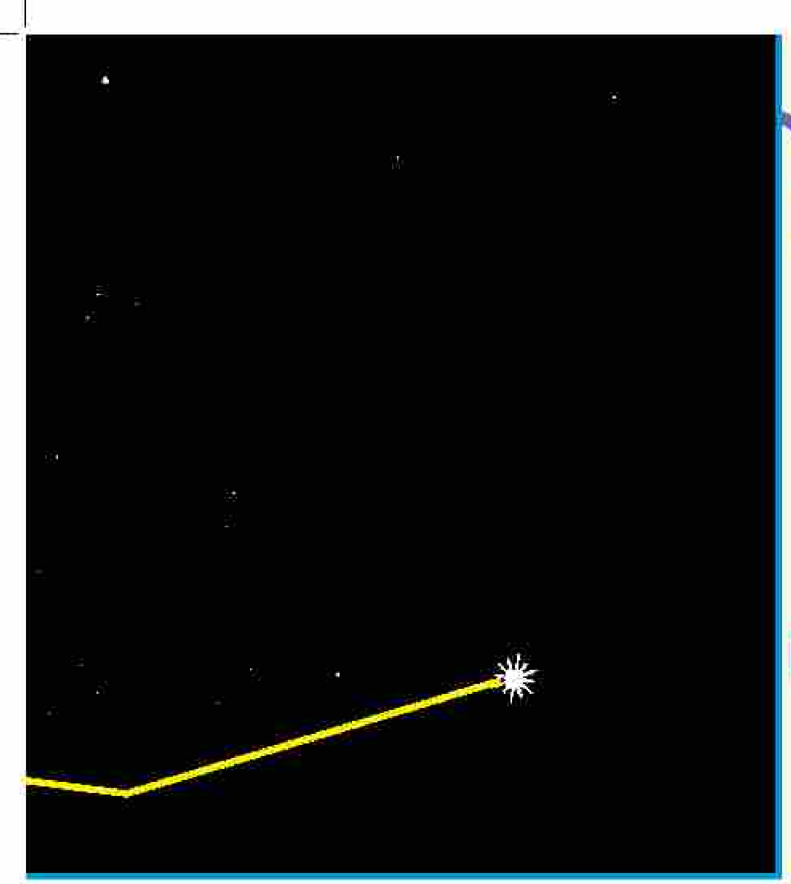
Objectifs de l'unité

Après l'étude de l'unité, l'élève devra être capable de :

- Identifier un angle orienté.
- Identifier la position standard d'un angle orienté.
- Reconnaitre la mesure positive et la mesure négative d'un angle orienté.
- Distinguer la nature de la mesure de l'angle (en degrés et en radians).
- Identifier la mesure en radians de l'angle au centre dans un cercle.
- Utiliser une calculatrice pour convertir une mesure en radian en une mesure en degrés et vis versa.
- Identifier les fonctions trigonométriques.
- Déterminer le signe de différentes fonctions trigonométriques dans les quatre quadrants.
- Déduire que les ensembles d'angles équivalents ont les mêmes fonctions trigonométriques.
- Reconnaitre les rapports trigonométriques d'un angle aigu et d'un angle quelconque.
- Déduire les rapports trigonométriques de certains angles particuliers.
- Reconnaitre les relations particulières $(\theta \pm 180^\circ)$, $(\theta \pm 360^\circ)$, $(90^\circ \pm \theta)$ et $(270^\circ \pm \theta)$
- Trouver l'ensemble solution des équations trigonométriques de la forme :
  - sin ax = cos bx
  - tg ax = cotg bx
  - sec ax = cosec bx
- Trouver la mesure d'un angle en connaissant une valeur de l'un de ses rapports trigonométriques.
- Identifier la représentation graphique des fonctions sinus et cosinus et déduire leurs propriétés.
- Utiliser une calculatrice scientifique pour calculer les rapports trigonométriques de certains angles particuliers.
- Modéliser certains phénomènes physiques et de la vie quotidienne qui sont représentés par des fonctions trigonométriques.
- Utiliser la technologie de l'information pour reconnaitre les différentes applications des concepts de base de la trigonométrie.

Expressions de base

- Mesure en degrés
- Mesure en radians
- Angle orienté
- Radian
- Position standard
- Mesure positive
- Mesure négative
- Angles équivalents
- Angle quadrant
- Fonction trigonométrique
- Sinus
- Cosinus
- Tangente
- Cosécante
- Sécante
- Cotangente
- Fonction circulaire
- Angles associés



Leçons de l'unité

Leçon (4 – 1) : L'angle orienté
Leçon (4 – 2) : Mesure en radians et mesure en degrés
Leçon (4 – 3) : Fonctions trigonométriques
Leçon (4 – 4) : Angles associés
Leçon (4 – 5) : Représentation graphique des fonctions trigonométriques
Leçon (4 – 6) : Trouver la mesure d'un angle à partir d'une fonction trigonométrique

Matériel utilisé

Une calculatrice scientifique – Papiers graphiques – Ordinateur – Logiciels.

Historique

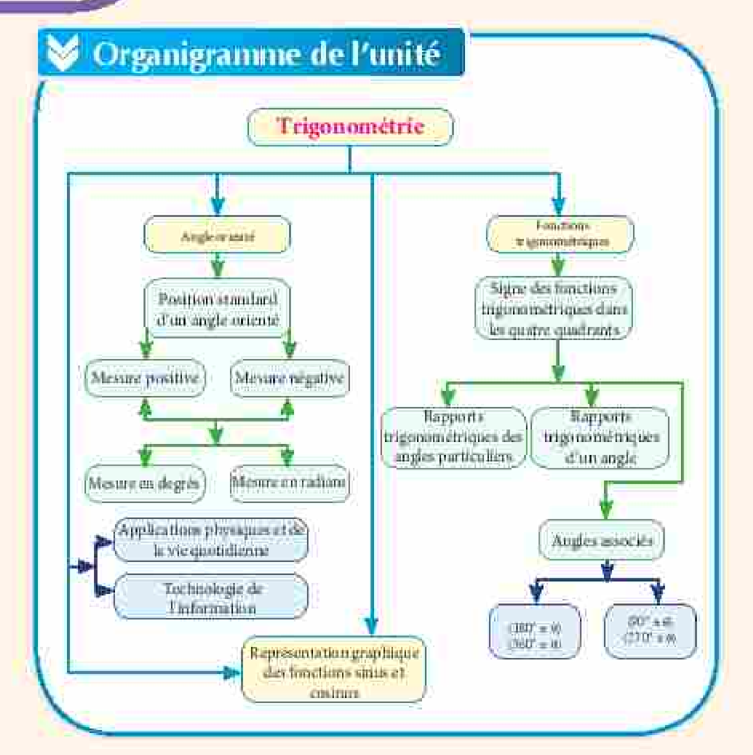
La trigonométrie est une branche des mathématiques qui traite des relations entre distances et angles dans les triangles. Cette science a prospéré, parmi les mathématiques anciennes, particulièrement dans l'astronomie à laquelle l'homme s'est intéressé pour contempler et observer le mouvement du soleil, de la lune, des étoiles et des planètes dans l'univers.

Le mathématicien arabe Nosseir El-dine El-Toussi est considéré comme le premier qui a différencié la trigonométrie de l'astronomie.

Les Arabes se sont beaucoup intéressés à la trigonométrie. On dit que l'expression « tangente » est décrite par le savant arabe Abu'l-Wafa Al Buzjani (940-998) au dixième siècle. Cette expression (en langue arabe) est issue de l'ombre des corps qui se constituent par les rayons de la lumière émise par le soleil.

Les Arabes ont également de nombreux ajouts en trigonométrie plane et trigonométrie sphérique (relative à la surface d'une sphère) et c'est des Arabes que les Occidentaux ont adopté des idées importantes auxquelles ils ont beaucoup contribué. La trigonométrie est devenue un domaine des recherches en mathématique, et dont l'application scientifique et pratique, très diversifiée, a participé au progrès et à la prospérité de l'humanité.

Organigramme de l'unité





4 - 1 L'angle orienté

A apprendre

- Notion de l'angle orienté.
- Position standard d'un angle orienté.
- Mesure positive et mesure négative d'un angle orienté.
- Position d'un angle orienté dans un repère orthogonal.
- Notion des angles équivalents.

Expressions de base

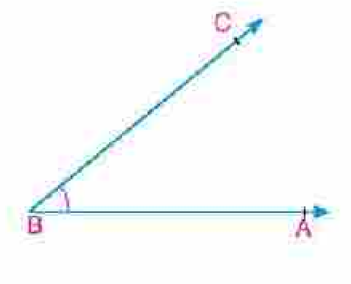
- Mesure en degrés
- Angle orienté
- Position standard
- Mesure positive
- Mesure négative
- Angle équivalent
- Angle quadrant

Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique



Tu as déjà étudié qu'un angle est la réunion de deux demi-droites ayant une même origine.
Dans la figure ci-contre, le point B est appelé « **le sommet de l'angle** » et les deux demi-droites $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont les côtés de l'angle.
Par conséquent, $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC} = (\angle ABC)$
Qui s'écrit également $\widehat{ABC}$.



Mesure d'un angle en degrés

Tu sais que la mesure en degrés d'un angle est basée sur le partage d'un cercle en 360 arcs de même longueur. Il en résulte :

1- l'angle au centre dont les deux côtés passent par les deux extrémités de l'un de ces arcs a pour mesure un degré qu'on note (1°)
2- Chaque degré est subdivisé en 60 parties égales dont chacune est appelée « une minute qu'on note (1').
3- Chaque minute est subdivisée en 60 parties dont chacune est appelée « une seconde » qu'on note (1'').

Donc $1° = 60'$ et $1' = 60''$

A apprendre

Angle orienté

Si on observe l'ordre de présentation des deux demi-droites formant un angle, on peut les écrire sous la forme du couple $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$
Le premier élément du couple $\overrightarrow{OA}$ est le côté initial de l'angle et son second élément $\overrightarrow{OB}$ est le côté final de l'angle ayant pour sommet O comme le montre la figure (1) .

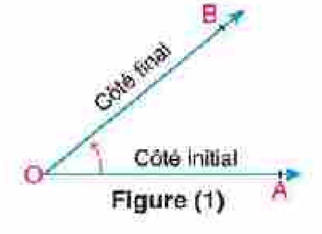
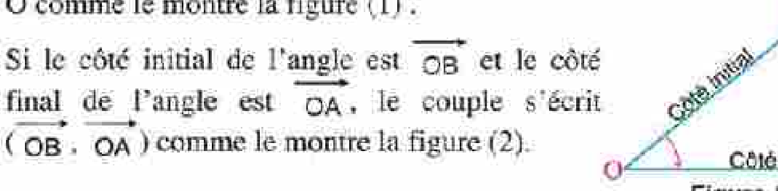


Figure (1)



Si le côté initial de l'angle est $\overrightarrow{OB}$ et le côté final de l'angle est $\overrightarrow{OA}$, le couple s'écrit $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$ comme le montre la figure (2).

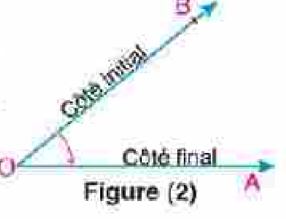


Figure (2)



L'angle orienté est un couple de demi-droites de même origine. L'origine est le sommet de l'angle et les deux demi-droites sont les côtés de l'angle.

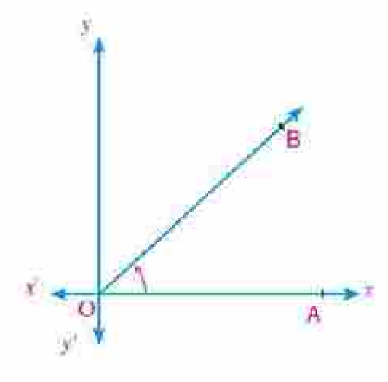
Réflexion critique:

➢ A-t-on $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$? Justifie ta réponse.

Position standard d'un angle orienté

On dit qu'un angle est en position standard si son sommet est le point d'origine dans un repère orthogonal et son côté initial est situé sur la partie positive de l'axe des abscisses.

Dans la figure ci-contre, l'angle $\angle AOB$ est-il un angle orienté ? Explique ta réponse.



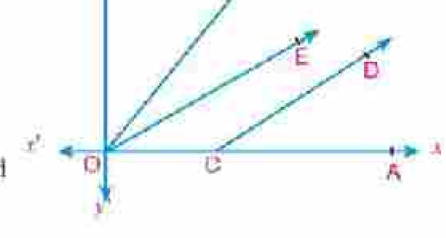
Expression orale

Dans la figure ci-contre, Lesquels des couples suivants représentent des angles orientés en position standard ? Explique ta réponse..

A $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})$ B $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE})$

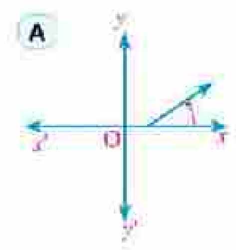
C $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OA})$ D $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG})$

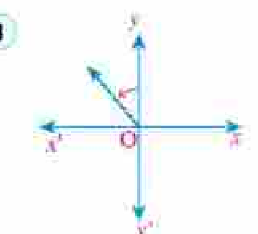
E $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OG})$ F $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

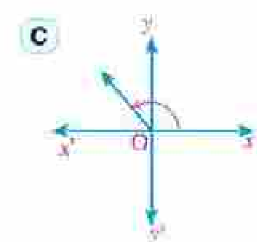


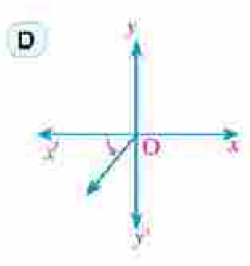

Essaie de résoudre

1 Lesquels des couples suivants est en position standard ? Explique ta réponse..

A 

B 

C 

D 

Mesure positive et mesure négative d'un angle orienté

Dans la figure (1), la mesure de l'angle orienté est positive si l'orientation du côté initial $\overrightarrow{OA}$ vers le côté final $\overrightarrow{OB}$ est contre le sens des aiguilles d'une montre.

Dans la figure (2), la mesure de l'angle orienté est négative si l'orientation du côté initial $\overrightarrow{OA}$ vers le côté final $\overrightarrow{OB}$ est dans le sens des aiguilles d'une montre.

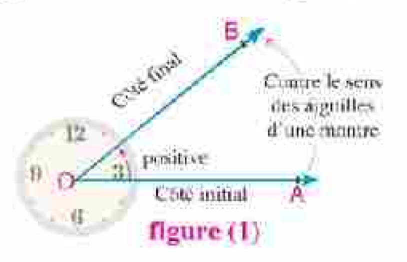


figure (1)

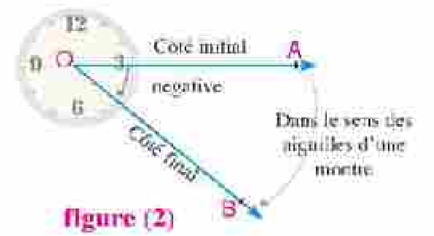
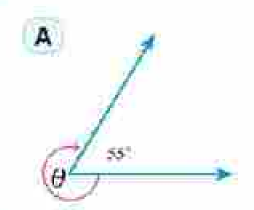
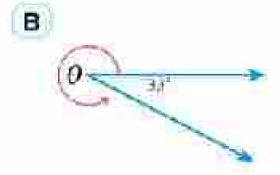


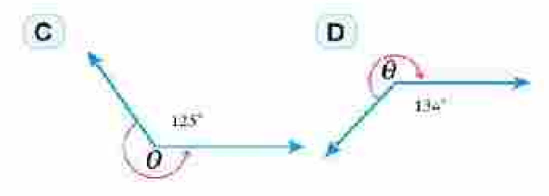
figure (2)

Exemple

1 Trouve la mesure de l'angle orienté θ indiqué dans chacune des figures suivantes :








Solution

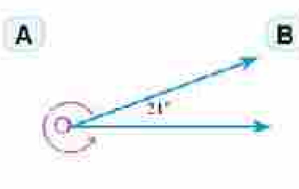
On sait que la somme des mesures des angles formés autour d'un point est égale à 360°

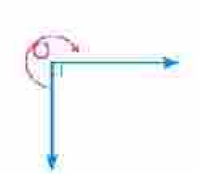
A $\theta = -(360° - 55°) = -305°$ **B** $\theta = 360° - 33° = 327°$

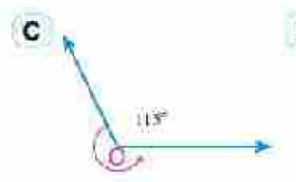
C $\theta = 360° - 125° = 235°$ **D** $\theta = -(360° - 134°) = -226°$

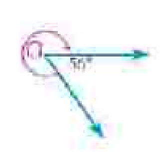
Essaie de résoudre

2 Trouve la mesure de l'angle orienté O indiqué dans chacune des figures suivantes :



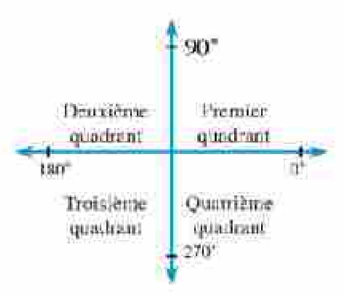




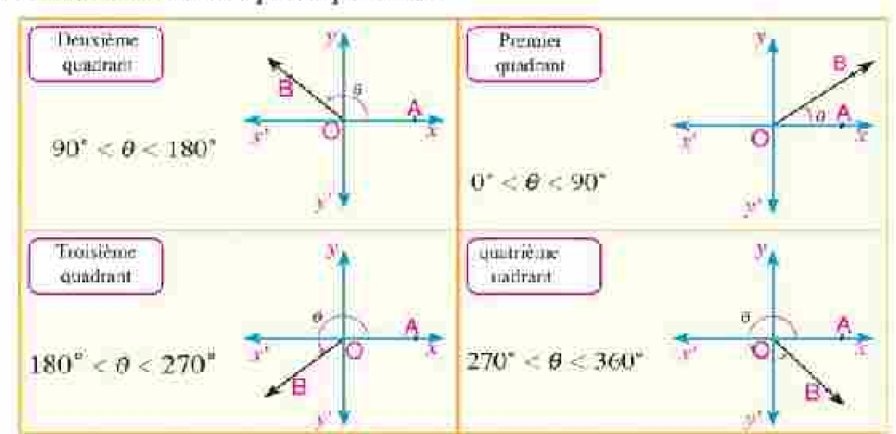


Position d'un angle dans un repère orthogonal :

➢ On partage le repère orthogonal en quatre quadrants comme l'indique la figure ci-contre.



➢ Si l'angle orienté $\angle$ AOB de mesure positive (θ) est en position standard, alors son côté final $\overrightarrow{OB}$ peut être situé dans l'un des quatre quadrants :



➢ Si le côté final $\overrightarrow{OB}$ est situé sur l'un des deux axes, l'angle dans ce cas est appelé « **Angle quadrant** ». Par conséquent les angles des mesures 0°, 90°, 180°, 270°, 360° sont des angles quadrants.



2 Détermine le quadrant dans lequel se trouve chacun des angles ayant pour mesures :

A 48° **B** 217° **C** 135° **D** 295° **E** 270°

Solution

A $0° < 48° < 90°$ Il est situé dans le premier quadrant.

B $180° < 217° < 270°$ Il est situé dans le troisième quadrant.

C $90° < 135° < 180°$ Il est situé dans le deuxième quadrant.

D $270° < 295° < 360°$ Il est situé dans le quatrième quadrant.

E 270° est un angle quadrant

Essaie de résoudre

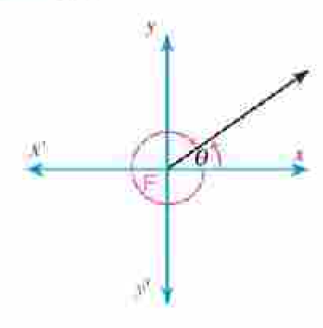
3 Détermine le quadrant dans lequel se trouve chacun des angles ayant pour mesures :

A 88° **B** 152° **C** 180° **D** 300° **E** 196°

Remarque :

➢ Si ($\theta°$) est la mesure positive d'un angle orienté, alors la mesure négative de cet angle est ($\theta° - 360°$)

➢ Si ($-\theta°$) est la mesure négative d'un angle orienté, alors la mesure positive de cet angle est ($-\theta° + 360°$)



Exemple

3 Détermine la mesure négative d'un angle de mesure $275°$.

Solution

La mesure négative d'un angle de mesure $(275°) = 275° - 360° = -85°$

Vérification : $|275°| + |-85°| = 275° + 85° = 360°$



La somme des valeurs absolues de la mesure positive et de la mesure négative d'un angle orienté est égale à 360°

Essaie de résoudre

4 Détermine la mesure négative de l'angle de mesure :

A $32°$ **B** $270°$ **C** $210°$ **D** $315°$

Exemple

4 Détermine la mesure positive d'un angle de mesure $-235°$

Solution

La mesure positive d'un angle de mesure $(-235°) = 360° - 235° = 125°$

Vérification : $|-235°| + |125°| = 235° + 125° = 360°$

Essaie de résoudre

5 Détermine la mesure positive de l'angle de mesure :

A $-52°$ **B** $-126°$ **C** $-90°$ **D** $-320°$

6 Lien avec le sport : Un lanceur de disque tourne d'un angle de mesure $150°$. Dessine cet angle en position standard.

Angles équivalents :

Observe les figures suivantes, puis détermine l'angle orienté θ en position standard dans chacune des figures suivantes. Que remarques-tu ?

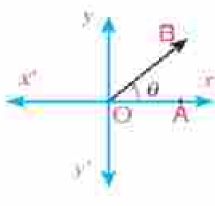


figure (1)

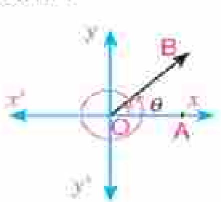


figure (2)

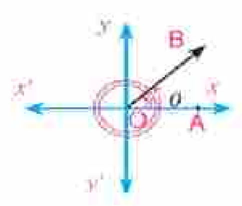


figure (3)

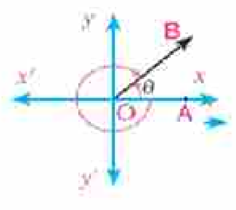


figure (4)

Dans les figures (2) , (3) et (4), on remarque que l'angle (θ) et l'autre angle ont le même côté final $\overrightarrow{OB}$.

Figure (1) : L'angle de mesure θ est en position standard

Figure (2) : Les deux angles de mesures θ et $\theta + 360°$ sont équivalents.

Figure (3) : Les deux angles de mesures θ et $\theta + 360° \times 2$ sont équivalents

Figure (4) : Les deux angles de mesures θ et $\theta - 360°$ sont équivalents.

De ce qui précède, on déduit que :
Si un angle orienté de mesure θ est en position standard, tous les angles de mesures :

$\theta + 1 \times 360°$ ou $\theta + 2 \times 360°$ ou $\theta + 3 \times 360°$ ou .... ou $\theta + n \times 360°$ où $n \in \mathbb{Z}$

ont le même côté final et ils sont appelés **angles équivalents**.

Exemple

(5) Détermine deux angles, l'un de mesure positive et l'autre de mesure négative, équivalents à chacun des deux angles suivants :

A $120°$ B $-230°$

Solution

A Un angle de mesure positive : $120° + 360° = 480°$ **(en ajoutant 360°)**
Un angle de mesure négative : $120° - 360° = -240°$ **(en retranchant 360°)**

B Un angle de mesure positive : $-230° + 360° = 130°$ **(en ajoutant 360°)**
Un angle de mesure négative : $-230° - 360° = -590°$ **(en retranchant 360°)**

Réfléchis : Y a-t-il d'autres angles équivalents de mesures positives et d'autres angles équivalents de mesures négatives ? Cite d'autres angles s'ils existent.

Essaie de résoudre

(7) Détermine deux angles, l'un de mesure positive et l'autre de mesure négative, équivalents à chacun des angles suivants :

A $40°$ B $150°$ C $-125°$ D $-240°$ E $-180°$

(8) **Déceler l'erreur :** Toutes les mesures d'angles suivantes sont équivalentes à l'angle en position standard de mesure 75° sauf une :

A $-285°$ B $-645°$ C $285°$ D $435°$

Test de compréhension

(1) Détermine le quadrant dans lequel se trouve chacun des angles ayant pour mesures :

A $56°$ B $325°$ C $570°$ D $166°$ E $390°$

(2) Détermine un angle de mesure négative, équivalent à chacun des angles suivants :

A $43°$ B $214°$ C $125°$ D $90°$ E $312°$

(3) Détermine un angle de mesure positive, équivalent à chacun des angles suivants :

A $-56°$ B $-215°$ C $495°$ D $930°$ E $-450°$

4 - 2 Mesure en radians et mesure en degrés

A apprendre

- La notion de mesure en degrés.
- Relation entre la mesure en degrés et la mesure en radians.
- Calcul de la longueur d'un arc d'un cercle.

Expressions de base

- Mesure en degrés
- Mesure en radians
- Radian

Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique



On sait qu'en mesure en degrés, on utilise les degrés, les minutes et les secondes. Un degré = 60 minutes et une minute = 60 secondes
Y a-t-il d'autres unités de mesures d'angles ?

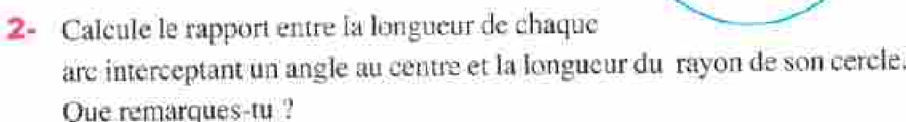
Mesure en radians



1- Trace un ensemble de cercles concentriques comme dans la figure ci-contre.

2- Calcule le rapport entre la longueur de chaque arc interceptant un angle au centre et la longueur du rayon de son cercle. Que remarques-tu ?

On remarque que : le rapport entre la longueur d'un arc et et la longueur du rayon de son cercle est constant.



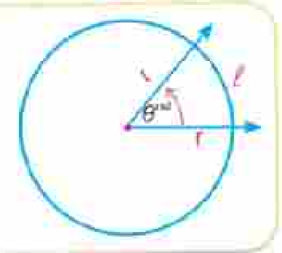
Donc $\frac{\text{longueur } \widehat{A_1B_1}}{OA_1} = \frac{\text{longueur } \widehat{A_2B_2}}{OA_2} = \frac{\text{longueur } \widehat{A_3B_3}}{OA_3} = \text{constante}$

Cette valeur constante est la mesure en radians d'un angle.
La mesure en radians d'un angle au centre = $\frac{\text{longueur de l'arc qui intercepte l'angle}}{\text{longueur du rayan du cercle}}$



Si θ^{rad} la mesure d'un angle au centre d'un cercle de longueur de rayon **R**, intercepte un arc de longueur L, alors

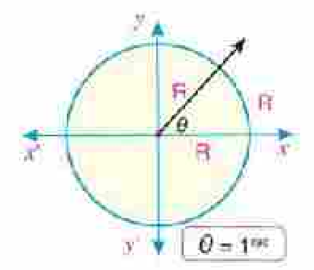
$$\theta^{rad} = \frac{L}{R}$$



De la définition précédente, on déduit que :

$$L = \theta^{rad} \times R \quad \text{et} \quad R = \frac{L}{\theta^{rad}}$$

L'unité de mesure dans ce cas est le radian notée (1^{rd}) et se lit (un radian).



Définition

Le radian

C'est la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur égale à la longueur du rayon du cercle.

Réflexion critique : La mesure en radians d'un angle au centre est-elle proportionnelle à la longueur de l'arc qu'il intercepte ? Explique ta réponse.

Exemple

4 La longueur du rayon d'un cercle est égale à 8 cm. Trouve à un centième près la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de mesure $\frac{5}{12}\pi$.

Solution

On utilise la formule de la longueur de l'arc : $L = \theta^{rad} \times R$

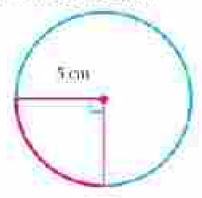
$r = 8$ cm , $\theta^{rad} = \frac{5\pi}{12}$, $L = 8 \times \frac{5\pi}{12}$ $\therefore L \simeq 10{,}47$cm



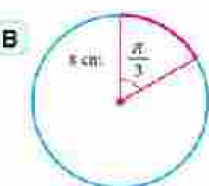
Essaie de résoudre

1 Détermine à un centième près, la longueur de l'arc intercepté par l'angle au centre dans chacun des cercles suivants :

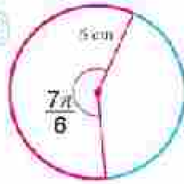
A



B



C



Relation entre la mesure en degrés et la mesure en radians d'un angle :

On sait que la mesure de l'angle au centre dans un cercle est égale à la mesure de l'arc qu'il intercepte.

Par conséquent, l'angle au centre dont la mesure en degrés est 360°, a pour longueur d'arc $2\pi R$

Dans un cercle d'unité :

2π (en radians) est équivalent à 360°.

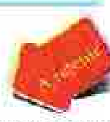
D'où π^{rd} est équivalent à 180° , $1^{rd} = \frac{180^\circ}{\pi} \simeq 57^\circ\,17'\,45''$

À retenir

Si la longueur du rayon d'un cercle est égale à l'unité de longueur, le cercle est appelé « cercle d'unitair »

Si un angle a pour mesure en radians θ^{rd} et pour mesure en degrés x°, alors :

$$\frac{x^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta^{rd}}{\pi}$$



Exemple

5) Transforme 30° en mesure en radians en fonction de π.

Pour transformer en radians, on applique la formule $\frac{x^{\circ}}{180^{\circ}} = \frac{\theta^{rad}}{\pi}$

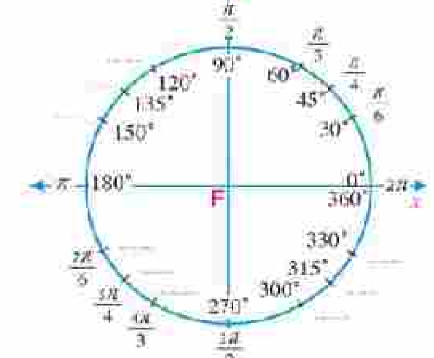
$$\theta^{rad} = \frac{30^{\circ} \times \pi}{180^{\circ}} = \frac{\pi}{6}$$

Il y a une autre unité pour mesurer l'angle appelée «de grade» qui est égale à $\frac{1}{200}$ de la mesure d'un angle plat.
Si x , θ et z sont les meures d'un même angle en degrés, en radians et en grade respectivement, alors :

$$\frac{x^{\circ}}{180^{\circ}} = \frac{\theta^{rad}}{\pi} = \frac{y^{rad}}{200}$$

Essaie de résoudre

2) La figure ci-contre indique les mesures de quelques angles particuliers dont certaines mesures sont indiquées en radians à l'extérieur du cercle et en degrés à l'intérieur du cercle. Complète les mesures des angles équivalents manquants.



Exemple

6) Transforme $1{,}2^{rad}$ en mesure en degrés.

Solution

$$x^{\circ} = \frac{1{,}2 \times 180^{\circ}}{\pi}$$

$$x^{\circ} = 68{,}75493542 = 68^{\circ}\ 45'\ 18''$$

On peut utiliser la calculatrice comme suit :



Essaie de résoudre

3) Transforme chacune des mesures en radians suivantes en mesure en degrés :

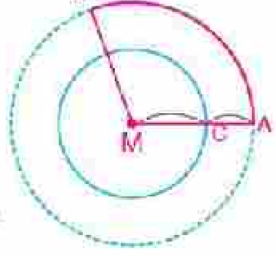
A 0.7^{rad} **B** 1.6^{rad} **C** 2.05^{rad} **D** -1.05^{rad}

Exemple

7) **Liens avec l'espace :** Un satellite qui tourne autour de la terre dans une orbite circulaire fait un tour complet en trois heures. Si la longueur du rayons de la terre est environ 6400 km et le satellite est distant de la surface de la terre de 3600 km, calcule, à un kilomètre près, la distance parcourue par le satellite en une heure.



 **Solution**



La figure ci-contre montre l'orbite circulaire du mouvement de la lune :

∵ La longueur du rayon de l'orbite MA = MC + CA

∴ MA = 6400 + 3600 = 10 000 km

∵ Le satellite fait le tour complet en trois heures ce qui correspond à un angle au centre de mesure 2π

∴ Le satellite fait un arc de longueur égale $\frac{1}{3}$ du périmètre du cercle en une heure. Cet arc intercepte un angle au centre de mesure $\frac{2\pi}{3}$



En utilisant la formule de la longueur de l'arc :

Si R = 10000 km et $\theta^{rad} = \frac{2\pi}{3}$.

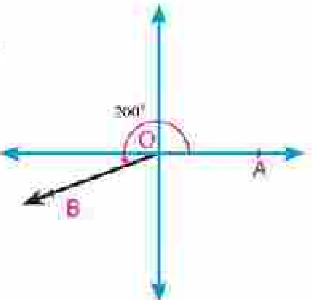
$$L = \theta^{rad} \times R$$

$$L = \frac{2\pi}{3} \times 10\,000$$

$$L \simeq 20944 \text{ km}$$

8 **Jeux sportifs :** Un gymnaste tourne d'un angle de mesure 200°. Trace cet angle dans la position standard puis calcule sa mesure en radians.

Solution



On construit un repère orthogonal d'origine O. Supposons que le joueur tourne d'un angle orienté AOB :

tel que $\angle$ (AOB) = ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$) donc m ($\angle$ AOB) = 200°.

∵ 180° < 200° < 270°

∴ le côté final de l'angle est situé au troisième quadrant.

$200° = \frac{200 \times \pi}{180} \simeq 3{,}49^{rad}$

 **Essaie de résoudre**

4 **Lien avec le sport :** Un joueur de squash se déplace suivant un arc d'un cercle de longueur de rayon 1,4 mètres. Si l'angle de rotation du joueur est 80°, trouve à un dixième près la longueur de l'arc.

Test de compréhension

9 **Industrie :** Le disque d'une machine tourne d'un angle de mesure – 315°. Dessine cet angle en position standard.



4 - 3 Fonctions trigonométriques

A apprendre

- Cercle d'unité.
- Fonctions trigonométriques de base.
- Fonctions trigonométriques inverses.
- Signe des fonctions trigonométriques.
- Fonctions trigonométriques de certains angles particuliers

Expressions de base

- Fonction trigonométrique
- Sinus
- Cosinus
- Tangente
- Cosécante
- Sécante
- Cotangente

Materials

- Une calculatrice scientifique

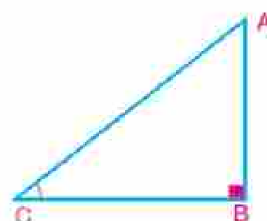


Tu as déjà étudié les rapports trigonométriques de base d'un angle aigu.
Dans un triangle ABC rectangle en B, on a :

$$\sin C = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos C = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{BC}{AC}$$

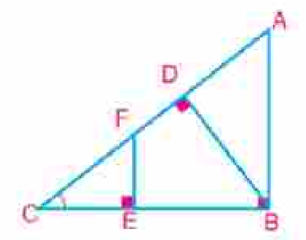
$$\text{tg } C = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} = \frac{AB}{BC}$$



1- **Dans la figure ci-contre,** exprime sin C de trois rapports différents.

★ Les trois rapports sont-ils égaux ? Explique ta réponse.

★ Que peux-tu déduire ?



Remarque que:
Les triangles BAC , EFC et DBC sont semblables. Pourquoi ?

De la similitude des triangles, on obtient : $\frac{BA}{AC} = \frac{EF}{FC} = \frac{DB}{BC} = \sin C$ (Pourquoi ?)

Cela signifie que le rapport trigonométrique d'un angle aigu est constant. Ce rapport ne change que si l'angle lui-même change.

2- **La figure ci-contre** indique un quart cercle de longueur de rayon R cm

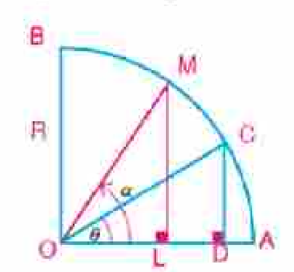
où: $m(\angle DOC) = \theta$

$$\sin \theta = \frac{CD}{R}$$

Si $m(\angle DOC)$ augmente et devient α

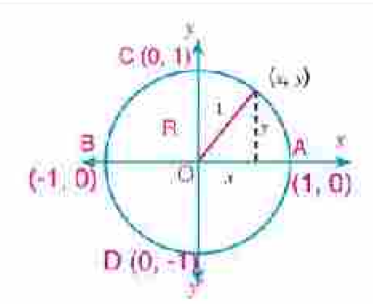
Alors $\sin \alpha = \frac{ML}{R}$

Donc le changement de la mesure d'un angle entraine le changement de ses rapports trigonométiques.



Cercle trigonométrique

Dans un repère orthogonal, le cercle ayant pour centre le point d'origine du repère et pour longueur de rayon l'unité de longueur est appelé « le cercle trigonométrique ».



- ★ Le cercle d'unité coupe l'axe des abscisses aux points A (1, 0) et B (-1, 0). Il coupe également l'axe des ordonnées aux points C (0, 1) et D (0, -1).
- ★ Si (x, y) sont les coordonnées d'un point appartenant au cercle d'unité, alors :
  $x \in [-1, 1]$, $y \in [-1, 1]$.
  où $x^2 + y^2 = 1$ **Théorème de Pythagore**

Fonctions trigonométriques de base d'un angle

Soit un angle orienté de mesure θ, en position standard. Si le côté final de l'angle coupe le cercle d'unité au point $B(x, y)$, on peut définir les fonctions suivantes :

1- cosinus θ = l'abscisse du point B

Donc $\cos\theta = x$

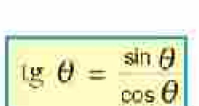
2- sinus θ = l'ordonnée du point B

Donc $\sin\theta = y$

3- tangente θ = $\dfrac{\text{l'ordonnée du point B}}{\text{l'abscisse du point B}}$



Donc $\text{tg}\ \theta = \dfrac{y}{x}$ où $x \neq 0$ et par conséquent ,



$\text{tg}\ \theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ où $\cos\theta \neq 0$

Remarque que: Tout point (x, y) appartenant au cercle d'unité peut s'écrire sous la forme $(\cos\theta, \sin\theta)$

Si $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ est le point d'intersection du côté final d'un angle orienté de mesure θ avec le cercle d'unité

alors : $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$ et $\text{tg}\ \theta = \frac{4}{3}$

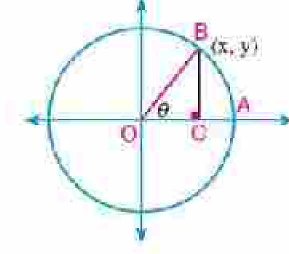
Inverses des fonctions trigonométriques

Soit un angle orienté de mesure θ en position standard. Si le côté final de l'angle coupe le cercle trigonométrique au point $B(x, y)$, on peut définir les fonctions suivantes :

1- sécante θ : $\sec\theta = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\cos\theta}$ où $x \neq 0$

2- cosécante θ : $\text{cosec}\ \theta = \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{\sin\theta}$ où $y \neq 0$

3- cotangente θ : $\text{cotg}\ \theta = \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{\text{tg}\ \theta}$ où $y \neq 0$



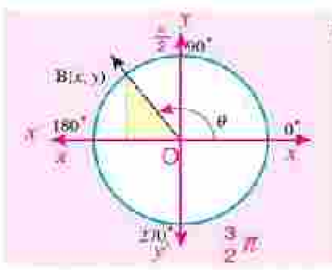
Signe des fonctions trigonométriques

Premier quadrant

$x > 0$

$y > 0$

Le côté final de l'angle est situé au premier quadrant. Donc toutes les fonctions trigonométriques de l'angle, ayant pour côté final $\overrightarrow{OB}$ sont positives.

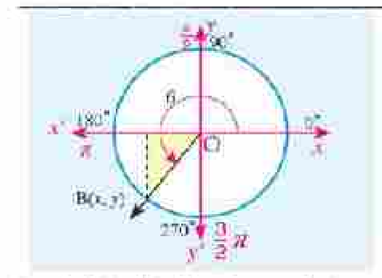


Deuxième quadrant

$x < 0$

$y > 0$

Le côté final de l'angle est situé au deuxième quadrant. Donc la fonction sinus et son inverse sont positives et les autres fonctions sont négatives.



Troisième quadrant

$x < 0$

$y < 0$

Le côté final de l'angle est situé au troisième quadrant. Donc la fonction tangente et son inverse sont positives et les autres fonctions sont négatives.

Quatrième quadrant

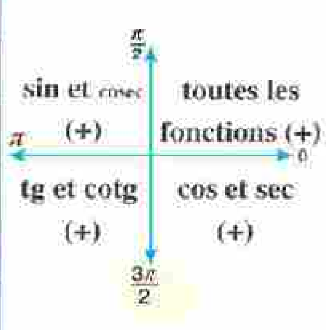
$x > 0$

$y < 0$

Le côté final de l'angle est situé au quatrième quadrant.
Donc la fonction cosinus et son inverse sont positives et les autres fonctions sont négatives.

Nous pouvons résumer les signes de toutes fonctions trigonométriques dans le tableau suivant :

Quadrant auquel appartient le côté final de l'angle	Intervalle auquel appartient la mesure de l'angle	Signe des fonctions trigonométriques		
		sin et cosec	cos et sec	tg et cotg
Premier	$]0\ ,\ \frac{\pi}{2}[$	+	+	+
Deuxième	$]\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi[$	+	−	−
Troisième	$]\pi\ ,\ \frac{3\pi}{2}[$	−	−	+
Quatrième	$]\frac{3\pi}{2}\ ,\ 2\pi[$	−	+	−



Exemple

1. Détermine le signe de chacune des fonctions suivantes :

A sin 130° **B** tg 315° **C** cos 650° **D** sec (-30°)

Solution

A L'angle de mesure 130° est situé au deuxième quadrant ∴ sin 130° est positif

B L'angle de mesure 315° est situé au quatrième quadrant $\therefore$ tg 315° est négatif.

C L'angle de mesure 650° est équivalent à un angle de mesure $650° - 360° = 290°$

$\therefore$ L'angle de mesure 650° est situé au quatrième quadrant. $\therefore$ cos 650° est positif.

D L'angle de mesure (-30°) est équivalent à un angle de mesure $-30° + 360° = 330°$

L'angle de mesure (-30°) est situé au quatrième quadrant. $\therefore$ sec (-30°) est positif.

Essaie de résoudre

1 Détermine le signe de chacune des fonctions suivantes :

A cos 210° **B** sin 740° **C** tg (- 300°) **D** sin 1230°

Exemple

2 Soit l'angle $\angle$ AOB de mesure θ en position standard. Si son côté final coupe le cercle trigonométrique au point B, trouve les rapports trigonométriques de base de $\angle$ AOB si les coordonnées du point B sont :

A (0, -1) **B** $(\frac{1}{\sqrt{2}}, y)$ **C** $(-x, x)$

où $x > 0$, $y > 0$

Solution

A $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = -1$ et $\text{tg}\,\theta = \frac{-1}{0}$ (indéfini)

B $x^2 + y^2 = 1$ (cercle trigonométrique) en remplaçant x par $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + y^2 = 1$ d'où $y^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore y = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$ (refusée)

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\text{tg}\,\theta = 1$

C $(-x)^2 + (x)^2 = 1$ $\therefore 2x^2 = 1$ $\therefore x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ car $x > 0$

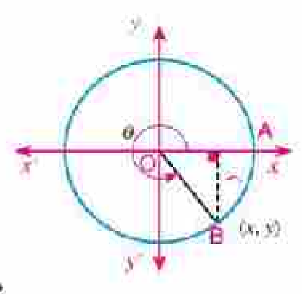
$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\text{tg}\,\theta = -1$

3 Si $270° < \theta < 360°$ et si $\sin\theta = -\frac{5}{13}$, trouve tous les rapports trigonométriques de base de l'angle de mesure θ

Solution

Soient m ($\angle$ AOB) = θ où θ est situé au quatrième quadrant et les cordonnées du point B sont (x, y)





$\because y = \sin\theta = -\frac{5}{13}$, $x = \cos\theta$ où $\cos\theta > 0$

$\because x^2 + y^2 = 1$ $\therefore \cos^2\theta + \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1$

$\therefore \cos^2\theta = 1 - \frac{25}{169}$ $\therefore \cos^2\theta = \frac{144}{169}$, $\cos\theta = \frac{12}{13}$ ou $\cos\theta = -\frac{12}{13}$

$\cos\theta = \frac{12}{13}$ (Pourquoi ?) $\text{tg}\,\theta = -\frac{5}{12}$

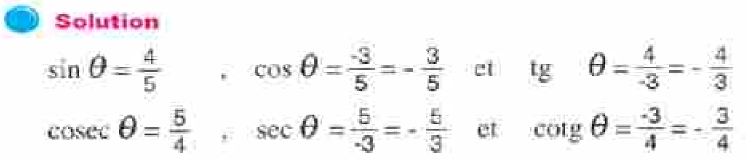
Essaie de résoudre

2 Si $90^\circ < \theta < 180^\circ$ et si $\sin\theta = \frac{4}{5}$, trouve $\cos\theta$ et $\text{tg}\,\theta$ où θ est un angle en position standard dans le cercle trigonométrique

Exemple

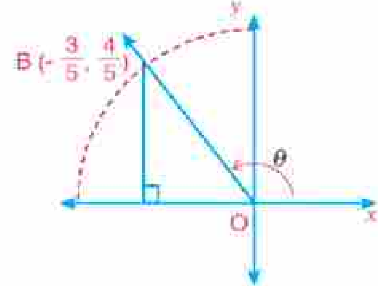
4 Soit un angle de mesure θ en position standard. Si son côté final coupe le cercle trigonométrique au point $B(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.
trouve tous les rapports trigonométriques de l'angle θ.

Solution



$\sin\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$ et $\text{tg}\,\theta = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$

$\text{cosec}\,\theta = \frac{5}{4}$, $\sec\theta = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$ et $\text{cotg}\,\theta = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$



Essaie de résoudre

3 Soit un angle de mesure θ en position standard. Trouve tous les rapports trigonométriques de l'angle θ sachant que son côté final coupe le cercle trigonométrique au point B dans chacun des cas suivants :

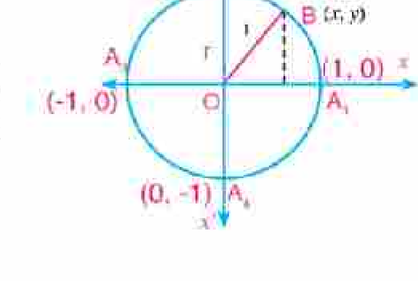
A $(\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$ **B** $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ **C** $(-\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$

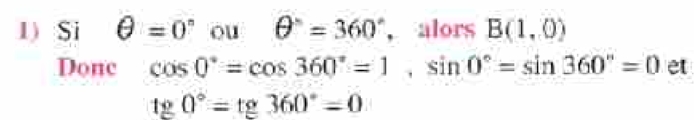
Fonctions trigonométriques de certains angles particuliers

Dans la figure ci-contre, le cercle trigonométrique coupe les deux axes aux points

$A_1(1, 0)$, $A_2(0, 1)$, $A_3(-1, 0)$, $A_4(0, -1)$.

Soit θ la mesure de l'angle orienté AOB en position standard tel que son côté final $\overrightarrow{OB}$ coupe le cercle trigonométrique en B.





1) Si $\theta = 0^\circ$ ou $\theta^\circ = 360^\circ$, **alors** B(1, 0)
Donc $\cos 0^\circ = \cos 360^\circ = 1$, $\sin 0^\circ = \sin 360^\circ = 0$ et
$\text{tg}\,0^\circ = \text{tg}\,360^\circ = 0$

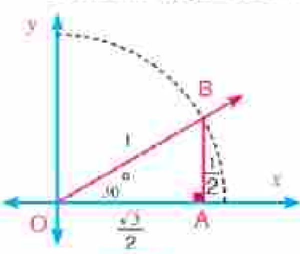
2) Si $\theta^\circ = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, **alors** B(0, 1)
Donc $\cos 90^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$, $\text{tg}\,\theta = \frac{1}{0}$ (indéfini)

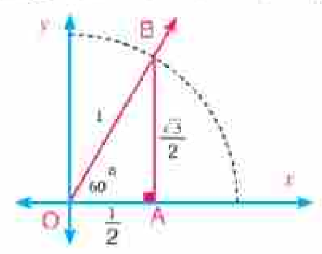
3) Si $\theta^\circ = 180^\circ = \pi$, **alors** B(-1, 0)
Donc $\cos 180^\circ = -1$, $\sin 180^\circ = 0$, $\text{tg}\,180^\circ = 0$

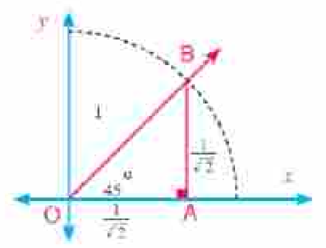
4) Si $\theta° = 270° = \frac{3\pi}{2}$, **alors** B(0, -1)
Donc $\cos 270° = 0$, $\sin 270° = -1$, $tg\ 270° = \frac{-1}{0}$ (indéfini)

Essaie de résoudre

4 Dans chacune de figures suivantes, détermine les coordonnées du point B, puis déduis les fonctions trigonométriques des angles de mesures 30°, 60°, 45°







Exemple

5 Sans utiliser de calculatrice, démontre que $\sin 60° \cos 30° - \cos 60° \sin 30° = \sin^2 \frac{\pi}{3}$

Solution

On sait que $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\therefore$ Membre gauche $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (1)

$\because \frac{\pi}{4} = 45°$, $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ Membre droit $= \sin^2 \frac{\pi}{4} = \sin^2 45° = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ (2)

De (1) et (2), les deux membres sont égaux.

Essaie de résoudre

5 Sans utiliser de calculatrice, trouve la valeur de $3 \sin 30° \sin 60° - \cos 0° \sec 60° + \sin 270° \cos^2 45°$

6 **Réflexion critique :** Soit θ la mesure d'un angle en position standard. Si $\cos \theta = \frac{-1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ est-il possible que θ soit égale à 240° ? Explique ta réponse.

Test de compréhension

Démontre chacune des égalités suivantes :

A $1 - 2\sin^2 90° = \cos 180°$ **B** $\cos \frac{\pi}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{4}$

4 - 4 Angles associés

A apprendre

- Relation entre les fonctions trigonométriques des deux angles θ et $180° \pm \theta$
- Relation entre les fonctions trigonométriques des deux angles θ et $360° - \theta$
- Relation entre les fonctions trigonométriques des deux angles θ et $90° \pm \theta$
- Relation entre les fonctions trigonométriques des deux angles θ et $270° \pm \theta$
- Solution générale des équations trigonométriques de la forme :
  - $\sin \alpha = \cos \beta$
  - $\sec \alpha = \text{cosec } \beta$
  - $\text{tg } \alpha = \text{cotg } \beta$

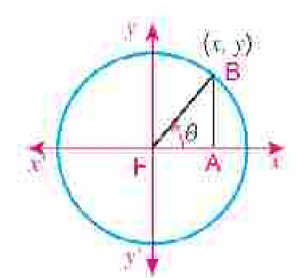
Expressions de base

- Deux angles associés

Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique



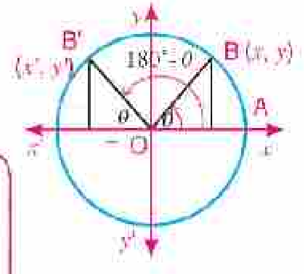


Tu as déjà étudié la symétrie axiale et ses propriétés. **La figure ci-contre** montre un angle orienté AOB, en position standard, de mesure θ où $0° < \theta < 90°$. Son côté final coupe le cercle trigonométrique au point B (x ; y).

Détermine le point B' image du point B par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, puis écris ses coordonnées.

Quelle est la mesure de $\angle$ AOB'? $\angle$ AOB' est-il en position standard ?

1- Fonctions trigonométriques des deux angles θ et $(180° - \theta)$



Dans la figure ci-contre, B' (x', y') est l'image de B(x, y) par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. $x' = -x$, $y' = y$ Donc :

$$\sin(180° - \theta) = \sin\theta \quad , \text{cosec}(180° - \theta) = \text{cosec }\theta$$
$$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta \quad , \sec(180° - \theta) = -\sec\theta$$
$$\text{tg}(180° - \theta) = -\text{tg }\theta \quad , \text{cotg}(180° - \theta) = -\text{cotg }\theta$$

Par exemple : $\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

$\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Essaie de résoudre

(1) Trouve tg 135° , sin 120° , cos 150°

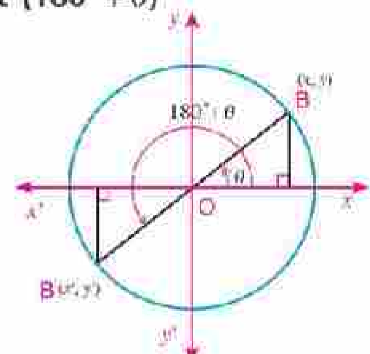
Remarque que: $\theta + (180° - \theta) = 180°$

On dit que les deux angles θ et $(180° - \theta)$ **sont associés.**



Définition : Deux angles sont associés si la somme ou la différence de leurs mesures est égale à $n \times 90°$ où $n \in \mathbb{Z}$.

2- Fonctions trigonométriques des deux angles θ et $(180^\circ + \theta)$



Dans la figure ci-contre,

$B'(x', y')$ est l'image de $B(x, y)$ par la symétrie par rapport au pont d'origine O.

On a : $x' = -x$, et $y' = -y$ Donc :

$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$, $\text{cosec}(180^\circ + \theta) = -\text{cosec}\,\theta$

$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$, $\sec(180^\circ + \theta) = -\sec\theta$

$\text{tg}(180^\circ + \theta) = \text{tg}\,\theta$, $\text{cotg}(180^\circ + \theta) = \text{cotg}\,\theta$



Par exemple :

$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

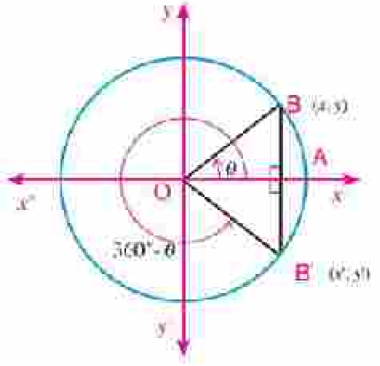
$\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\text{tg}\ 240^\circ = \text{tg}\ (180^\circ + 60^\circ) = \text{tg}\ 60^\circ = \sqrt{3}$

Essaie de résoudre

(2) Trouve $\sin 225^\circ$, $\cos 210^\circ$, $\sec 600^\circ$ et $\text{cotg}\ 225^\circ$.

3- Fonctions trigonométriques des deux angles θ , $(360^\circ - \theta)$



Dans la figure ci-contre,

$B'(x', y')$ est l'image de $B(x, y)$ par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

On a : $x' = x$, $y' = -y$ Donc :

$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$, $\text{cosec}(360^\circ - \theta) = -\text{cosec}\,\theta$

$\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$, $\sec(360^\circ - \theta) = \sec\theta$

$\text{tg}(360^\circ - \theta) = -\text{tg}\,\theta$, $\text{cotg}(360^\circ - \theta) = -\text{cotg}\,\theta$

Par exemple :

$\sin 330^\circ = \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

$\cos 315^\circ = \cos(360^\circ - 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Remarque que

Les fonctions trigonométriques des angles $(-\theta)$ et $(360^\circ - \theta)$ sont identiques.

Essaie de résoudre

(3) Trouve : $\sin 315^\circ$, $\text{cosec}\ 315^\circ$, $\text{tg}\ 330^\circ$, $\text{tg}\ 300^\circ$

Réflexion critique : Comment peut-on trouver $\sin(-45^\circ)$, $\cos(-60^\circ)$, $\text{tg}(-30^\circ)$ et $\sin 690^\circ$.

Exemple

6 Sans utiliser de calculatrice, trouve la valeur de l'expression :

$\sin 150^\circ \cos(-300^\circ) + \cos 930^\circ \text{ cotg } 240^\circ$

Solution

$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos(-300^\circ) = \cos(-300^\circ + 360^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 930^\circ = \cos(930^\circ - 2 \times 360^\circ) = \cos 210^\circ = \frac{1}{2}$

Donc $\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{cotg } 240^\circ = \text{cotg}(180^\circ + 60^\circ) = \text{cotg } 60^\circ = \frac{1}{\text{tg}60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

L'expression $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + (-\frac{\sqrt{3}}{2}) \times \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

Essaie de résoudre

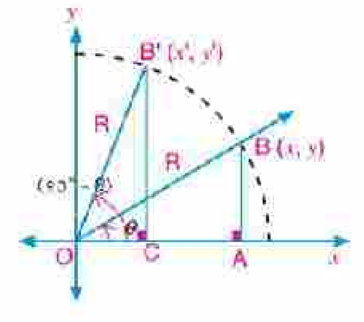
4 Démontre que : $\sin 600^\circ \cos(-30^\circ) + \sin 150^\circ \cos(-240^\circ) = -1$

4- Fonctions trigonométriques des deux angles θ et $(90^\circ - \theta)$

La figure ci-contre indique une partie d'un cercle de centre O.

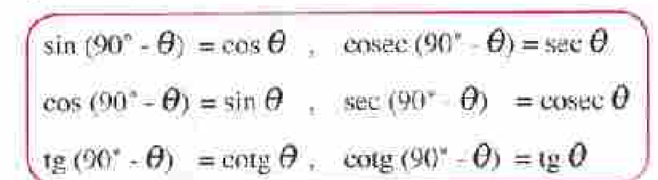
L'angle de mesure θ est en position standard et a pour rayon R.

De la superposition des deux triangles OAB et OCB' :



On a : $x' = y$, $y' = x$

Donc on peut déduire toutes les fonctions trigonométriques reliant les deux angles θ et $(90^\circ - \theta)$:



$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$, $\text{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$

$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$, $\sec(90^\circ - \theta) = \text{cosec}\,\theta$

$\text{tg}(90^\circ - \theta) = \text{cotg}\,\theta$, $\text{cotg}(90^\circ - \theta) = \text{tg}\,\theta$

Exemple

1 Si le côté final d'un angle de mesure θ , en position standard, passe par le point $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, trouve les fonctions trigonométriques : $\sin(90^\circ - \theta)$ et $\text{cotg}(90^\circ - \theta)$

Solution

$\because \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$ $\therefore \sin(90^\circ - \theta) = \frac{3}{5}$

$\because \cot g(90^\circ - \theta) = tg\ \theta$ $\therefore \cot g(90^\circ - \theta) = \frac{4}{3}$

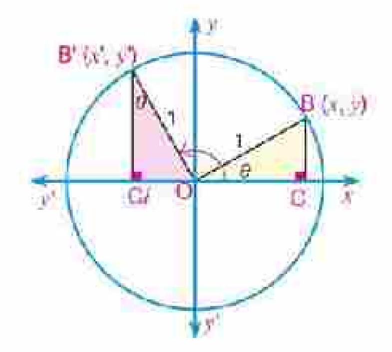
Essaie de résoudre

5 Dans l'exemple précédent, calcule $\cos(90^\circ - \theta)$ et $\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)$

5- Fonctions trigonométriques des deux angles θ et $(90^\circ + \theta)$

De la superposition des deux triangles B'C'O et OCB

On a : $y' = x$, $x' = -y$



Donc on peut déduire toutes les fonctions trigonométriques reliant les deux angles θ et $(90^\circ + \theta)$ comme suit :

$\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$, $\operatorname{cosec}(90^\circ + \theta) = \sec\theta$

$\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$, $\sec(90^\circ + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

$tg(90^\circ + \theta) = -\cot g\,\theta$, $\cot g(90^\circ + \theta) = -tg\,\theta$

Exemple

2 Si le côté final d'un angle de mesure θ, en position standard, passe par le point $(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ trouve les fonctions trigonométriques $tg(90^\circ + \theta)$ et $\operatorname{cosec}(90^\circ + \theta)$

Solution

$\because tg(90^\circ + \theta) = -\cot g\,\theta$ $\therefore tg(90^\circ + \theta) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\because \operatorname{cosec}(90^\circ + \theta) = \sec\theta$ $\therefore \operatorname{cosec}(90^\circ + \theta) = 3$

Essaie de résoudre

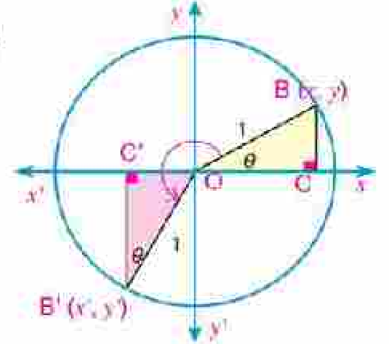
6 Dans l'exemple précédent, calcule : $\sin(90^\circ + \theta)$, $\sec(90^\circ + \theta)$

6- Fonctions trigonométriques des deux angles θ et $(270° - \theta)$

De la superposition des deux triangles B'C'O , OCB

On a : $y' = -x$ et $x' = -y$

Donc on peut déduire toutes les fonctions trigonométriques reliant les deux angles θ et $(270° - \theta)$ comme suit :



$\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$,	$\text{cosec}(270° - \theta) = -\sec\theta$
$\cos(270° - \theta) = -\sin\theta$,	$\sec(270° - \theta) = -\text{cosec}\,\theta$
$\text{tg}(270° - \theta) = \text{cotg}\,\theta$,	$\text{cotg}(270° - \theta) = \text{tg}\,\theta$

Exemple

3 Si le côté final d'un angle de mesure θ , en position standard, passe par le point $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ trouve les fonctions trigonométriques : $\cos(270° - \theta)$ et $\text{cotg}(270° - \theta)$

Solution

$\because \cos(270° - \theta) = -\sin\theta$ $\qquad\therefore \cos(270° - \theta) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$\because \text{cotg}(270° - \theta) = \text{tg}\,\theta$ $\qquad\therefore \text{cotg}(270° - \theta) = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Essaie de résoudre

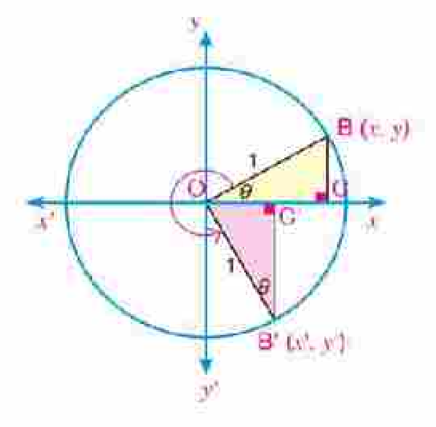
7 Dans l'exemple précédent, calcule $\text{tg}(270° - \theta)$ et $\text{cosec}(270° - \theta)$

7- Fonctions trigonométriques des deux angles θ et $(270° + \theta)$

De la superposition des deux triangles : B'C'O, OCB

On a : $y' = -x$ et $x' = y$

Donc on peut déduire toutes les fonctions trigonométriques reliant les deux angles θ et $(270° + \theta)$ comme suit :



$\sin(270° + \theta) = -\cos\theta$,	$\text{cosec}(270° + \theta) = -\sec\theta$
$\cos(270° + \theta) = \sin\theta$,	$\sec(270° + \theta) = \text{cosec}\,\theta$
$\text{tg}(270° + \theta) = -\text{cotg}\,\theta$,	$\text{cotg}(270° + \theta) = -\text{tg}\,\theta$

Exemple

4 Si le côté final d'un angle de mesure θ , en position standard, passe par le point $(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3})$ trouve les fonctions trigonométriques : $\sin(270° + \theta)$ et $\sec(270° + \theta)$



Solution

$\because \sin(270^\circ + \theta) = -\cos\theta \qquad \therefore \sin(270^\circ + \theta) = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\because \sec(270^\circ + \theta) = \quad \text{cosec}\ \theta \qquad \therefore \sec(270^\circ + \theta) = \frac{3}{2}$

Essaie de résoudre

8 Dans l'exemple précédent, calcule $\text{cotg}(270^\circ + \theta)$ et $\text{cosec}(270^\circ + \theta)$.

Solution générale d'une équation trigonométrique de la forme

[sin(α) = cos(β), sec(α) = cosec (β) ou tg (α) = cotg (β)]



Tu as déjà étudié que si α et β sont les mesures de deux angles complémentaires (leur somme est égale à 90°) alors $\sin\alpha = \cos\beta$, sec = cosec β et tg = cotg β, , alors $\alpha + \beta = 90^\circ$ où α et β sont deux angles aigus. Mais si $\sin\theta = \cos 150^\circ$, quelles sont les valeurs attendues de θ ?



1- Si $\sin\alpha = \cos\beta$ (où α et β sont les mesures de deux angles complémentaires, alors :

➢ $\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$ **et par conséquent on obtient :** $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ **d'où** $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

➢ $\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} + \beta)$ **et par conséquent on obtient :** $\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta$ **d'où** $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$

En ajoutant $2\pi n$ à l'angle $\frac{\pi}{2}$ on obtient :

Si $\sin\alpha = \cos\beta$, **alors** $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

(où $n \in \mathbb{Z}$), De même :

Si $\text{cosec}\ \alpha = \sec\beta$, **alors** $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

(où $n \in \mathbb{Z}$), $\alpha \neq n\pi$ et $\beta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$

2- Si $\text{tg}\ \alpha = \text{cotg}\beta$ (où α et β sont les mesures de deux angles complémentaires, alors :

➢ $\text{tg}\ \alpha = \text{tg}(\frac{\pi}{2} - \beta)$ **et par conséquent on obtient** $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ **d'où** $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

➢ $\text{tg}\ \alpha = \text{tg}(\frac{3\pi}{2} - \beta)$ **et par conséquent on obtient** $\alpha = \frac{3\pi}{2} - \beta$ **d'où** $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$

En ajoutant $2\pi n$ aux deux angles $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ on obtient :

Si $\text{tg}\ \alpha = \text{tg}\beta$, **alors** $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \pi n$

(où $n \in \mathbb{Z}$), $\alpha \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ et $\beta \neq n\pi$

Exemple

5. Résous l'équation : $\sin 2\theta = \cos\theta$

Solution

$\sin 2\theta = \cos\theta$

$2\theta \pm \theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$ — de la définition de l'équation

(1) Soit $2\theta + \theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ d'où $3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n$ — en divisant les deux membres par 3

(2) ou $2\theta - \theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ d'où $\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

L'ensemble solution est : $\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n$ ou $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

Essaie de résoudre

9. Résous chacune des équations suivantes :

A) $\sin 4\theta = \cos 2\theta$ B) $2\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = 1$ C) $\cos 5\theta = \sin\theta$

10. Déceler l'erreur : Dans un concours de mathématiques, l'enseignant a demandé à Karim et à Ziaad de trouver la valeur de $\sin(\theta - \frac{\pi}{2})$ Qui a trouvé la bonne réponse ? Explique ta réponse.

Réponse de Karim

$\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin(2\pi + \theta - \frac{\pi}{2})$

$= \sin(\frac{3\pi}{2} + \theta)$

$= -\cos\theta$

Réponse de Ziaad

$\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin[-(\frac{\pi}{2} - \theta)]$

$= -\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$

$= -(-\cos\theta) = \cos\theta$

Test de compréhension

Trouve toutes les valeurs de θ où $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ qui vérifient chacune des équations suivantes :

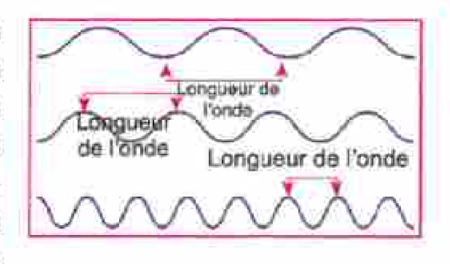
A) $\sin\theta - \cos\theta = 0$ B) $\operatorname{cosec}(\theta - \frac{\pi}{6}) = \sec\theta$ C) $2\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = 1$

Représentation graphique des fonctions trigonométriques

4 - 5



Les ultrasons sont basés sur des hautes fréquences de longueurs d'ondes différentes. Ils sont utilisés dans l'imagerie médicale. Ils sont utilisés également comme radar dans les sous-marins travaillant dans les profondeurs de l'océan. La représentation de ces ultrasons graphiquement permet d'étudier les propriétés des fonctions sinus et cosinus. Avec tes camarades, effectue le travail en groupe suivant :



Représentation graphique de la fonction sinus



1 Avec tes camarades, complète le tableau suivant :

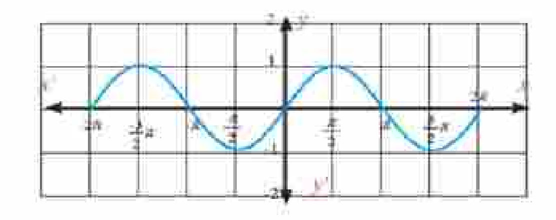
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\theta$	0	0.5							

2 Trace la courbe en joignant tous les points.

3 Dresse un autre tableau en utilisant les opposés des valeurs présentées dans le tableau précédent.

4 Représente tous les points obtenus dans un repère.

5 Complète la courbe représentative en joignant tous les points.



6 As-tu remarqué qu'il existe des valeurs maximales et des valeurs minimales de cette courbe? Explique ta réponse.

A apprendre

- Représentation de la fonction sinus et déduction de ses propriétés.
- Représentation de la fonction cosinus et déduction de ses propriétés

Expressions de base

- Fonction sinus
- Fonction cosinus
- Valeur maximale
- Valeur minimale

Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique
- Logiciels



Propriétés de la fonction sinus

Si f est une fonction telle que $f(\theta) = \sin \theta$, alors :

- ★ le domaine de définition de la fonction sinus est]- ∞ ; + ∞[et son ensemble image est [- 1, 1]
- ★ la fonction cosinus est une fonction périodique de période 2π ce qui signifie qu'on peut déplacer la courbe dans l'intervalle [0, 2π] vers la gauche ou vers la droite de 2π unités, de 4π unités, de 6π unités, ... etc.
- ★ la valeur maximale de la fonction sinus est égale à 1 et on l'obtient aux points d'abscisses $\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ où $n \in \mathbb{Z}$
- ★ la valeur minimale de la fonction sinus est égale à - 1 et on l'obtient aux points d'abscisses $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ où $n \in \mathbb{Z}$

Représentation graphique de la fonction cosinus



1 Avec tes camarades, complète le tableau suivant :

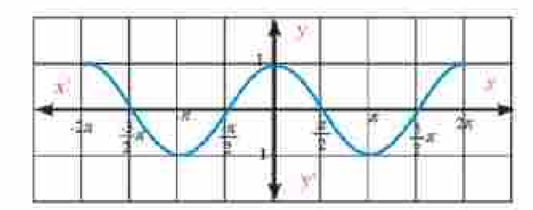
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos\theta$	1	0,8							

2 Trace la courbe en joignant tous les points.

3 Dresse un autre tableau en utilisant les opposés des valeurs présentées dans le tableau précédent.

4 Représente tous les points obtenus dans un repère.

5 Complète la courbe représentative en joignant tous les points.





Propriétés de la fonction sinus

Si f est une fonction telle que $f(\theta) = \cos \theta$ alors :

- ★ le domaine de définition de la fonction cosinus est]- ∞ ; + ∞[et son ensemble image est [-1, 1]
- ★ la fonction cosinus est une fonction périodique de période 2π, ce qui signifie qu'on peut déplacer la courbe dans l'intervalle [0, 2π] vers la gauche ou vers la droite de 2π unités, de 4π unités, de 6π unités, ... etc.

- ★ la valeur maximale de la fonction cosinus est égale à 1 et on l'obtient aux points d'abscisses

  $\theta = \pm 2\pi n$ où $n \in \mathbb{Z}$

- ★ la valeur minimale de la fonction cosinus est égale à (- 1) et on l'obtient aux points d'abscisses

  $\theta = \pi + 2\pi n$ où $n \in \mathbb{Z}$

Exemple

① **Lien avec la physique :** A marrée haute, un navire peut entrer dans un port si la profondeur de l'eau n'est pas inferieure à 10 mètres. Si le mouvement du flux et du reflux suit la relation , $p = 6 \sin (15\, t)^\circ + 10$ où t est le temps écoulé en heures après minuit selon le système horaire de 24 heures et p est la profondeur de l'eau. Trouve le nombre de fois où la profondeur de l'eau atteint 10 mètres exactement.

Représente graphiquement la relation qui montre le changement de la profondeur de l'eau pendant le flux et le reflux durant un jour.

 **Solution**

La relation entre t en heures et la profondeur P en mètres est

$p = 6 \sin (15\, t)^\circ + 10$

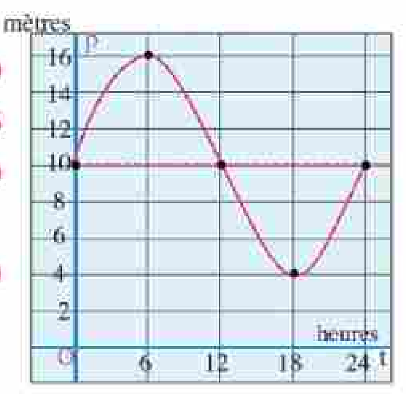
Pour t = 0 $p = 6 \sin (15 \times 0) + 10 = 6 \sin 0 + 10 = 10$

Pour t = 6 $p = 6 \sin (15 \times 6) + 10 = 6 \sin 90^\circ + 10 = 16$

Pour t = 12 $p = 6 \sin (15 \times 12) + 10 = 6 \sin 180^\circ + 10 = 10$

Pour t = 18 $p = 6 \sin (15 \times 18) + 10 = 6 \sin 270^\circ + 10 = 4$

Pour t = 24 $p = 6 \sin (15 \times 24) + 10 = 6 \sin 360^\circ + 10 = 10$



t en heures	0	6	12	18	24
P en mètres	10	16	10	4	10

Dans le tableau, on trouve que la profondeur de l'eau atteint 10 mètres si t = 10, 12 et 24 heures

Essaie de résoudre

① Dans l'exemple précédent, trouve le nombre d'heures d'un jour pendant lesquelles le navire peut entrer dans le port

Test de compréhension

① Trace la courbe représentative de la fonction $y = 3 \sin x$ où $x \in [0, 2\pi]$

② Trace la courbe représentative de la fonction $y = 2\cos x$ où $x \in [0, 2\pi]$



4 - 6 Trouver la mesure d'un angle en connaissant l'un de ses rapports trigonométriques

A apprendre

- Trouver la mesure d'un angle en connaissant une fonction trigonométrique.



On sait que si $y = \sin\theta$, alors on peut trouver la valeur de y en connaissant la valeur de θ. En connaissant une valeur de y, peut-on également trouver la valeur de θ ?



Si $y = \sin\theta$, **alors** $\theta = \sin^{-1} y$

Par exemple, si θ est un angle aigu positif et si $y = \frac{1}{2}$,

alors cette relation s'écrit $\theta = \sin^{-1}\frac{1}{2} = 30°$

Expressions de base

- Fonction trigonométrique



1 Trouve θ tel que $0° < \theta < 360°$ qui vérifie chacun des cas suivants :

A $\theta = \sin^{-1} 0,6325$ **B** $\theta = \text{cotg}^{-1}(-1,6204)$

Solution

A $\because \sin\theta > 0$

$\therefore$ l'angle est situé au premier ou au deuxième quadrant.

En utilisant une calculatrice :

SHIFT sin⁻¹ 0 . 6 3 2 5 = °'"

Dans le premier quadrant : $\theta = 39° \; 14' \; 6''$

Dans le deuxième quadrant : $\theta = 180° - 39° \; 14' \; 6'' = 140° \; 45' \; 54''$

Matériel et moyens

- Une calculatrice scientifique

B $\because \text{cotg}\,\theta < 0$

$\therefore$ l'angle est situé au deuxième ou au quatrième quadrant.

En utilisant une calculatrice :



Dans le deuxième quadrant $\theta = 180° - 31° \; 40' \; 48'' = 148° \; 19' \; 12''$

Dans le quatrième quadrant $\theta = 360° - 31° \; 40' \; 48'' = 328° \; 19' \; 12''$

Peux-tu vérifier ses réponses en utilisant une calculatrice ?

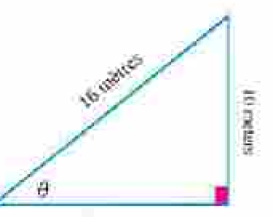
Essaie de résoudre

1. Trouve θ tel que $0° < \theta < 360°$ qui vérifie chacun des cas suivants :

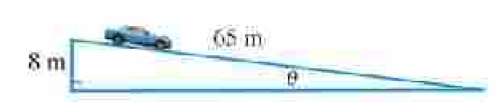
   A $\theta = \cos^{-1} 0,6205$ B $\theta = tg^{-1}(-2,3615)$ C $\theta = cosec^{-1}(-2,103$

Test de compréhension

1. **Lien avec les jeux sportifs :** Dans un parc d'attraction, la hauteur d'un toboggan est 10 mères et sa longueur est 16 mètres, écris une fonction trigonométrique permettant de trouver la valeur de θ, en degrés à un millième près.



2. **Voitures :** En voiture, Karim se dirige ver le bas d'une descente de longueur 65 mètres et de hauteur 8 mètres. Si la descente fait avec l'horizontale un angle de mesure θ calcule en degrés la valeur de θ.



3. **Déceler l'erreur :** A cause du vent, un palmier de taille 20 mètres s'est cassé pour prendre la formé indiquée dans la figure ci-contre. Si la longueur de la partie verticale du palmier est 7 mètres et celle de la partie oblique est 13 mètres et si θ est la mesure de l'angle formé par la partie cassé et le sol, calcule en degrés la valeur de θ.



Réponse de Karim

$\because cosec\, \theta = \frac{13}{7}$ $\therefore \theta = cosec^{-1} \frac{13}{7}$

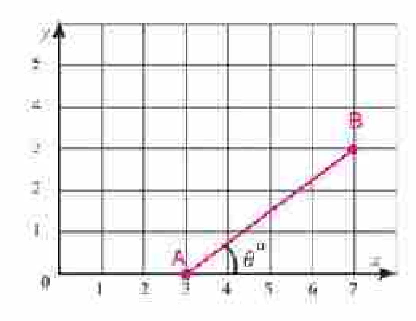
$\therefore \theta = 32° 34' 44''$

Réponse d'Omar

$\because \sec \theta = \frac{13}{7}$ $\therefore \theta = \sec^{-1} \frac{13}{7}$

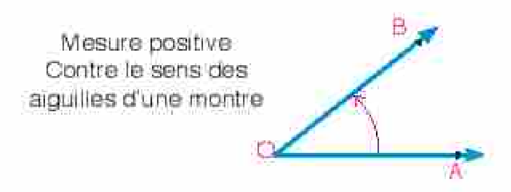
$\therefore \theta = 57° 25' 16''$

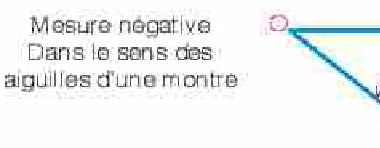
4. **Réflexion critique :** La figure ci-contre, représente un segment reliant deux points A(3, 0), B (7, 3). Trouve la mesure de l'angle formé entre $\overline{AB}$ et l'axe des abscisses .



Résumé de l'unité

1 **L'angle orienté :** C'est un couple de demi-droites ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$) de même origine. L'origine est le sommet de l'angle et les deux demi-droites sont les côtés de l'angle. $\overrightarrow{OA}$ est appelé le côté initial de l'angle et $\overrightarrow{OB}$ est appelé son côté final.







2 **Position standard d'un angle :** Dans un repère orthogonal, si le sommet de l'angle est le point d'origine et son côté initial est situé sur la partie positive de l'axe des abscisses.

3 **Angles équivalents :** Ce sont les angles en position standard dont la mesure est sous la forme $(\theta \pm n \times 360°)$ où $n \in \mathbb{Z}$ et ayant le même côté final.

4 **Le radian :** C'est la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur égale à la longueur du rayon du cercle .

5 **Relation entre la mesure en degrés et la mesure en radians :** Si un angle a pour mesure en radians θ^{rad} et pour mesure en degrés $x°$ alors :

$\theta^{rad} = x° \times \frac{\pi}{180°}$ et $x° = \theta^{rad} \times \frac{180°}{\pi}$

6 **Longueur de l'arc :** Si θ^{rad} est la mesure de l'angle au centre d'un cercle de longueur de rayon R intercepte un arc de longueur L, alors $L = \theta^{rad} \times R$

7 **Angle quadrant :** C'est un angle en position standard dont le côté final est situé sur l'un des deux axes.

8 **Cercle trigonométrique :** C'est un cercle dans un repère orthogonal ayant pour centre le point d'origine du repère et pour longueur de rayon l'unité de longueur.

9 **Rapport trigonométriques :** C'est le rapport entre les longueurs de deux côtés d'un triangle rectangle.

10 **Signe des fonctions trigonométriques :**

Remarque que :

Premier quadrant :	Deuxième quadrant :	Troisième quadrant :	Quatrième quadrant:
$0° < \theta < 90°$ Toutes les fonctions trigonométriques sont positives	$90° < \theta < 180°$ sin θ et cosec θ sont positives. Les autres fonctions sont négatives.	$180° < \theta < 270°$ tg θ et cotg θ sont positives. Les autres fonctions sont négatives.	$270° < \theta < 360°$ cos θ et sec θ sont positives. Les autres fonctions sont négatives.

11 Fonctions trigonométrique des angles ayant pour mesure :

(1) $(180° - \theta)$

$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$, $\text{cosec}(180° - \theta) = \text{cosec}\,\theta$
$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$, $\sec(180° - \theta) = -\sec\theta$
$\text{tg}\,(180° - \theta) = -\text{tg}\,\theta$, $\text{cotg}\,(180° - \theta) = -\text{cotg}\,\theta$

(2) $(180° + \theta)$

$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$, $\text{cosec}(180° + \theta) = -\text{cosec}\,\theta$
$\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$, $\sec(180° + \theta) = -\sec\theta$
$\text{tg}\,(180° + \theta) = \text{tg}\,\theta$, $\text{cotg}\,(180° + \theta) = \text{cotg}\,\theta$

(3) $(360° - \theta)$

$\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$, $\text{cosec}(360° - \theta) = -\text{cosec}\,\theta$
$\cos(360° - \theta) = \cos\theta$, $\sec(360° - \theta) = \sec\theta$
$\text{tg}\,(360° - \theta) = -\text{tg}\,\theta$, $\text{cotg}\,(360° - \theta) = -\text{cotg}\,\theta$

(4) $(90° - \theta)$

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$, $\text{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$
$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$, $\sec(90° - \theta) = \text{cosec}\,\theta$
$\text{tg}\,(90° - \theta) = \text{cotg}\,\theta$, $\text{cotg}\,(90° - \theta) = \text{tg}\,\theta$

(5) $(90° + \theta)$

$\sin(90° + \theta) = \cos\theta$, $\text{cosec}(90° + \theta) = \sec\theta$
$\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$, $\sec(90° + \theta) = -\text{cosec}\,\theta$
$\text{tg}\,(90° + \theta) = -\text{cotg}\,\theta$, $\text{cotg}\,(90° + \theta) = -\text{tg}\,\theta$

(6) $(270° - \theta)$

$\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$, $\text{cosec}(270° - \theta) = -\sec\theta$
$\cos(270° - \theta) = -\sin\theta$, $\sec(270° - \theta) = -\text{cosec}\,\theta$
$\text{tg}\,(270° - \theta) = \text{cotg}\,\theta$, $\text{cotg}\,(270° - \theta) = \text{tg}\,\theta$

(7) $(270° + \theta)$

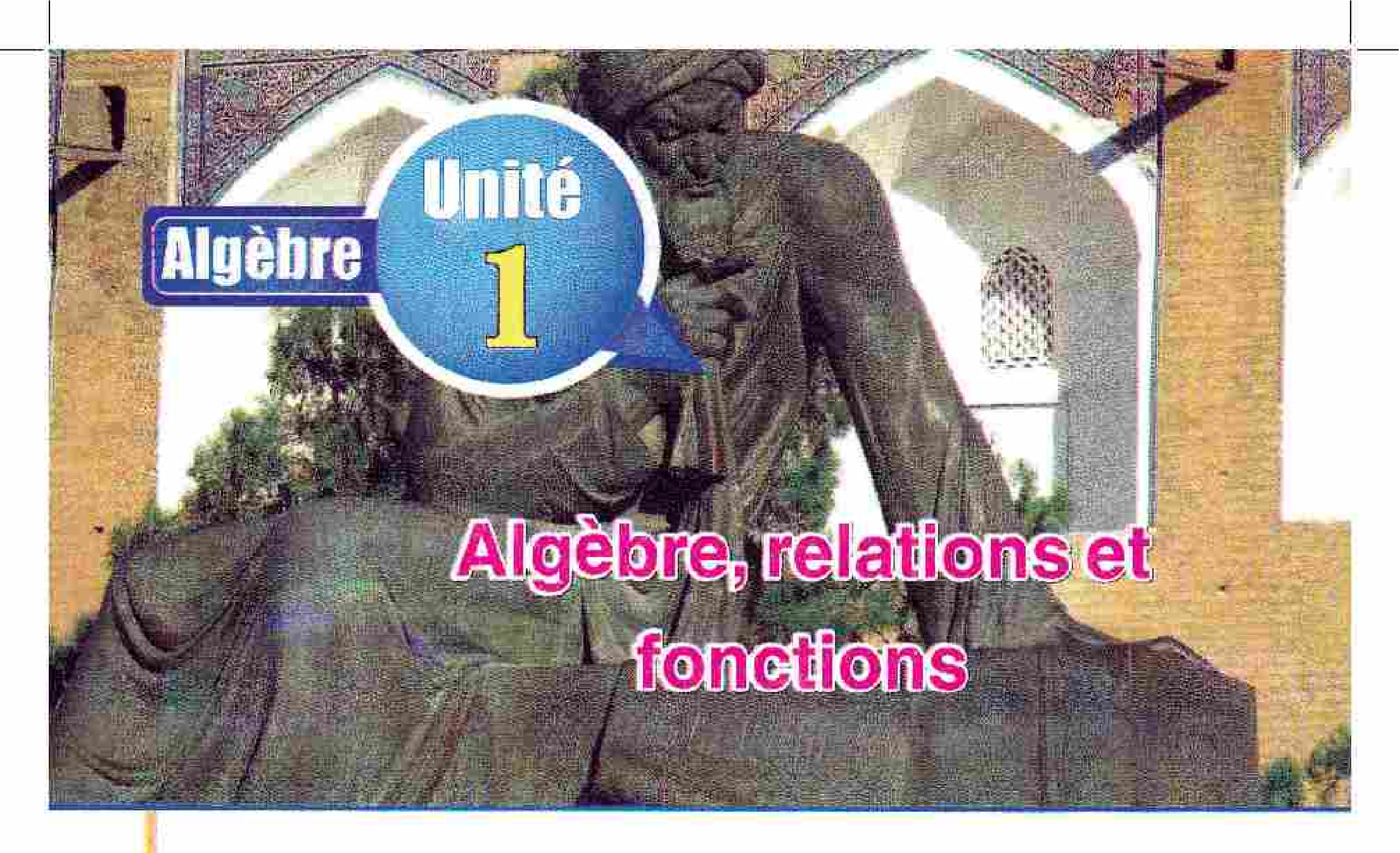
$\sin(270° + \theta) = -\cos\theta$, $\text{cosec}(270° + \theta) = -\sec\theta$
$\cos(270° + \theta) = \sin\theta$, $\sec(270° + \theta) = \text{cosec}\,\theta$
$\text{tg}\,(270° + \theta) = -\text{cotg}\,\theta$, $\text{cotg}\,(270° + \theta) = -\text{tg}\,\theta$

12 Propriétés des fonctions sinus et cosinus

Propriété	Fonction sinus $f(\theta) = \sin\theta$	Fonction cosinus $f(\theta) = \cos\theta$
Domaine de définition et ensemble image	Le domaine de définition est $]-\infty\,;+\infty[$ et l'ensemble image est $[-1, 1]$	Le domaine de définition est $]-\infty\,;+\infty[$ et l'ensemble image est $[-1, 1]$
Valeur maximale	C'est 1 en $\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$	C'est 1 en $\theta = \pm 2n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$
Valeur minimale	C'est -1 en $\theta = \frac{3\pi}{2} \pm 2n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$	C'est -1 en $\theta = \pi \pm n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$

13 Si le côté final d'un angle de mesure θ en position standard coupe le cercle trigonométrique au point B(x, y), alors $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$ Ce sont les fonctions circulaires.

14 Si $y = \sin\theta$, alors $\theta = \sin^{-1} y$.



Leçons de l'unité

1 - 1 Résolution d'une équation du second degré à une inconnue

1) Questions à choix multiples

1 $(x-1)(x+2)=0$ est une équation du .... degré

A premier **B** second **C** troisième **D** quatrième

2 L'ensemble solution de l'équation $x^2 = x$, dans $\mathbb{R}$ est : ....

A $\{0\}$ **B** $\{1\}$ **C** $\{-1, 1\}$ **D** $\{0, 1\}$

3 L'ensemble solution de l'équation $x^2 + 3 = 0$, dans $\mathbb{R}$, est : ....

A $\{-3\}$ **B** $\{-\sqrt{3}\}$

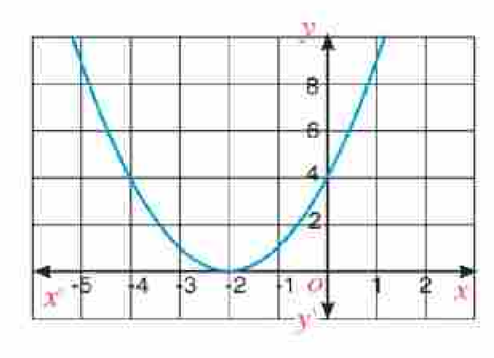
C $\{\sqrt{3}\}$ **D** ϕ

4 L'ensemble solution de l'équation $x^2 - 2x = -1$, dans $\mathbb{R}$, est : ....

A $\{-1\}$ **B** ϕ

C $\{-1, 1\}$ **D** $\{1\}$

5 La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction f du second degré. L'ensemble solution de l'équation $f(x) = 0$, dans $\mathbb{R}$, est ....






A $\{-2\}$ **B** $\{4\}$

C ϕ **D** $\{-2, 4\}$

2) Réponds aux questions suivantes :

6 Trouve, dans $\mathbb{R}$, l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

A $x^2 - 1 = 0$
....
....
....

B $x^2 + 3x = 0$
....
....
....

C $(x-4)^2 = 0$



....
....
....

D $x^2 - 6x + 9 = 0$
....
....
....

E $x^2 - 9 = 0$
....
....
....

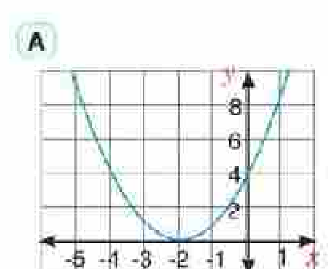
F $x(x+1)(x-1) = 0$



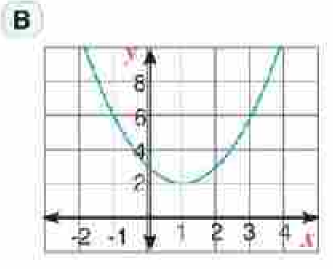
....
....
....

7 Chacune des figures suivantes représente une fonction du second degré. Trouve l'ensemble solution de l'équation $f(x) = 0$ dans chaque cas:

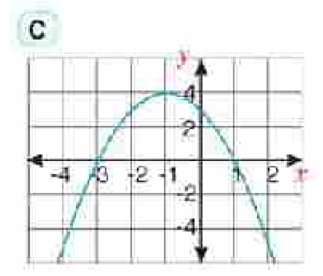
A



B



C



....

....

8 Trouve, dans $\mathbb{R}$, l'ensemble solution de chacune des équations suivantes, puis vérifie le résultat graphiquement :

A $x^2 = 3x + 40$ **B** $2x^2 = 3 - 5x$

C $6x^2 = 6 - 5x$ **D** $(x - 3)^2 = 5$

E $x^2 + 2x = 12$ **F** $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{5}x = 1$

9 En utilisant la formule générale, résous, dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes (donne une valeur approchée du résultat à un dixième près) :

A $3x^2 - 65 = 0$ **B** $x^2 - 6x + 7 = 0$

C $x^2 - 6x + 8 = 0$ **D** $2x^2+3x-4 = 0$

E $5x^2 - 3x - 1 = 0$ **F** $3x^2 - 6x - 4 = 0$

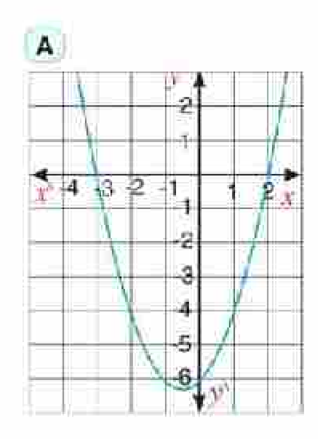
10 **Nombres:** Si la somme des nombres entiers consécutifs (1+ 2 + 3+ ....+ n) est donnée par la relation $S = \frac{n}{2}(1+n)$, trouve combien de nombres entiers consécutifs qu'il faut additionner à partir de 1 pour que la somme soit égale à :

A 78 **B** 171

C 253 **D** 465

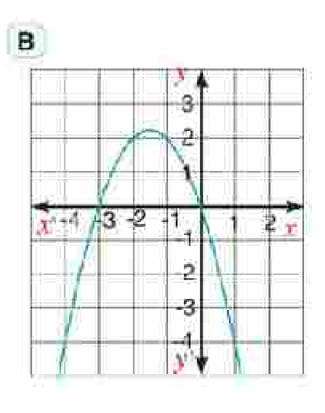
(11) Chacune des figures suivantes représente une fonction du second degré à une inconnue. Trouve l'expression algébrique de chaque fonction :

A



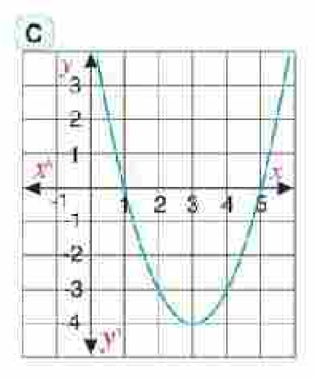
....

B



....

C



....

(12) **Déceler l'erreur :** Trouve l'ensemble solution de l'équation $(x-3)^2 = (x-3)$.

Réponse de Karim

$\because\ (x-3)^2 = (x-3)$

$\therefore\ (x-3)^2 - (x-3) = 0$

$\therefore\ (x-3)[(x-3)-1] = 0$

En simplifiant : $x-3=0$ ou $x-4=0$

L'ensemble solution = $\{3, 4\}$

Réponse de Ziad

$\because\ (x-3)^2 = (x-3)$

En divisant les deux membres par $(x-3)$ où $x \neq 3$

$\therefore\ x-3 = 1$ **En simplifiant**

$\therefore\ x = 4$

L'ensemble solution = $\{4\}$

Laquelle des deux solutions est juste ? Pourquoi ?

....

....

....

(13) **Réflexion critique :** Une balle est lancée verticalement vers le haut à une vitesse v égale à 29,4 m/s. Calcule en secondes, l'intervalle du temps t écoulé pour que la balle atteigne une hauteur d égale à 39,2 mètres sachant que la relation entre d et t est donnée par la formule $d = v\,t - 4{,}9\,t^2$.

....

....

....

Introduction aux nombres complexes

1 - 2

1 Mets sous la forme la plus simple :

A i^{65} .... **B** i^{-45} .... **C** i^{4n+2} .... **D** i^{4n-1} ....

2 Mets sous la forme la plus simple :

A $\sqrt{-18} \times \sqrt{-12}$ .... **B** $3\,i\,(-2i)$ .... **C** $(-4\,i)\,(-6\,i)$ .... **D** $(-2\,i)^3\,(-3\,i)^2$

3 Simplifie :

A $(3 + 2i) + (2 - 5\,i)$ **B** $(26 - 4i) - (9 - 20\,i)$ **C** $(20 + 25\,i) - (9 - 20\,i)$

4 Mets sous la forme $a + b\,i$:

A $(2 + 3\,i) - (1 - 2i)$ **B** $(1 + 2i^3)\,(2 + 3\,i^5 + 4\,i^6)$

5 Mets sous la forme $a + b\,i$:

A $\frac{2}{1+i}$ .... **B** $\frac{4+i}{i}$ .... **C** $\frac{2-3i}{3+i}$ .... **D** $\frac{(3+i)(3-i)}{3-4\,i}$ ....

6 Résous chacune des équations suivantes :

A $3x^2 + 12 = 0$ .... **B** $4y^2 + 20 = 0$ .... **C** $4z^2 + 72 = 0$ .... **D** $\frac{3}{5}\,y^2 + 15 = 0$ ....

7 **Électricité :** Trouve l'intensité du courant électrique passant à travers deux résistances placées en parallèle dans un circuit électrique fermé sachant que l'intensité du courant dans la première résistance est $(4 - 2\,i)$ Ampère et que l'intensité du courant dans la deuxième résistance est $\frac{6-3i}{2+i}$ Ampère ....

8 **Déceler l'erreur :** Mets sous la forme la plus simple : $(2 + 3i)^2\,(2 - 3i)$

Réponse de Karim

$(2 + 3i)^2(2 - 3i) = (4 + 9i^2)(2 - 3i)$
$= (4 - 9)(2 - 3i) = -5\,(2 - 3i)$
$= -10 + 15\,i$

Réponse d'Ahmed

$(2 + 3i)(2 + 3i)(2 - 3i)$
$= (2 + 3i)\,(4 - 9i^2)$
$= (2 + 3i)\,(4 + 9) = 13(2 + 3i)$
$= 26 + 39\,i$

Laquelle des deux solutions est juste ? Pourquoi ? ....

1 - 3 Détermination de la nature des racines d'une équation du second degré

1) Questions à choix multiples

1 Les racines de l'équation $x^2 - 4x + k = 0$ sont égales si ....

- **A** $k = 1$
- **B** $k = 4$
- **C** $k = 8$
- **D** $k = 16$

2 Les racines de l'équation $x^2 - 2x + M = 0$ sont réelles différentes si ....

- **A** $M = 1$
- **B** $M < 1$
- **C** $M > 1$
- **D** $M = 4$

3 Les racines de l'équation $L\,x^2 - 12\,x + 9 = 0$ sont complexes si ....

- **A** $L > 4$
- **B** $L < 4$
- **C** $L = 4$
- **D** $L = 1$

2) Réponds aux questions suivantes

4 Détermine le nombre de racines et leur nature pour chacune des équations suivantes :

A $x^2 - 2x + 5 = 0$ ....

B $3x^2 + 10x - 4 = 0$ ....

C $x^2 - 10x + 25 = 0$ ....

D $6x^2 - 19x + 35 = 0$ ....

E $(x - 11) - x(x - 6) = 0$ ....

F $(x - 1)(x - 7) = 2(x - 3)(x - 4)$ ....

5 Résous, dans l'ensemble des nombres complexes, chacune des équations suivantes en utilisant la formule générale :

A $x^2 - 4x + 5 = 0$ ....

B $2x^2 + 6x + 5 = 0$ ....

C $3x^2 - 7x + 6 = 0$ ....

D $4x^2 - x + 1 = 0$ ....

6 Trouve la valeur de k dans chacun des cas suivants :

A si les racines de l'équation $x^2 + 4x + k = 0$ sont réelles différentes.

....

B si les racines de l'équation $x^2 - 3x + 2 + \frac{1}{k} = 0$ sont égales.

....

C si les racines de l'équation $kx^2 - 8x + 16 = 0$ sont complexes.

....

7 Si L et M sont deux nombres rationnels, démontre que les racines de l'équation $L x^2 + (L - M) x - M = 0$ sont deux nombres rationnels.

....

8 Le nombre d'habitants de la République Arabe d'Égypte en 2013 est estimé par la relation : $n = a^2 - 1.2\,a + 91$ où n représente le nombre d'habitants en millions et a est le nombre représentant l'année.

A Quel est le nombre d'habitants en 2013 ? ....

B Estime le nombre d'habitants en 2023. ....

C Estime en quelle année, le nombre d'habitants atteindra 334 millions. ....

D Ecris un article expliquant les raisons de l'explosion démographique et comment y remédier.

9 **Déceler l'erreur :** Trouve, dans $\mathbb{R}$, le nombre de racines de l'équation $2x^2 - 6x = 5$

Réponse de Karim

$b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 2\,(-5)$

$= 36 + 40 = 76$

le discriminant est positif

il y a deux racines réelles différentes

Réponse d'Ahmed

$b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 5$

$= 36 - 40 = -4$

le discriminant est négatif

il n'y a pas de racines réelles

Laquelle des deux solutions est juste ? Pourquoi ? ....

....

10 Si les racines de l'équation $x^2 - 2\,(k - 1)\,x + (2k - 1) = 0$ sont égales, trouve les valeurs réelles de k, puis calcule les deux racines.

....

....

11 **Réflexion critique :** Résous, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $36x^2 - 48x + 25 = 0$

....

....

....

1 - 4 Relation entre les racines d'une équation du second degré et les coefficients de ses termes

1) Complète ce qui suit :

1. Si $x = 3$ est l'une des racines de l'équation $x^2 + Mx - 27 = 0$, alors M = ... et l'autre racine = ...

2. Si le produit des racines de l'équation: $2x^2 + 7x + 3K = 0$ est égal à la somme des racines de l'équation : $x^2 - (K + 4)x = 0$, alors K = ...

3. L'équation du second degré dont chacune des racines dépasse de 1 les racines de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ est ....

4. L'équation du second degré dont chacune des racines est inférieure de 1 par rapport aux racines de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ est ....

2) Questions à choix multiples :

5. Si l'une des racines de l'équation $x^2 - 3x + c = 0$ est le double de l'autre, alors c = ...
   - A) -4
   - B) -2
   - C) 2
   - D) 4

6. Si l'une des racines de l'équation $ax^2 - 3x + 2 = 0$ est l'inverse de l'autre, alors a = ...
   - A) $\frac{1}{3}$
   - B) $\frac{1}{2}$
   - C) 2
   - D) 3

7. Si l'une des racines de l'équation $x^2 - (b - 3)x + 5 = 0$ est l'opposé de l'autre, alors b = ...
   - A) -5
   - B) -3
   - C) 3
   - D) 5

3) Réponds aux questions suivantes :

8. Trouve la somme et le produit des racines de chacune des équations suivantes :
   - A) $3x^2 + 19x - 14 = 0$ ....
   - B) $4x^2 + 4x - 35 = 0$ ....

9. Trouve la valeur de a et l'autre racine de l'équation dans chacun des cas suivants :
   - A) Si $x = -1$ est l'une des racines de l'équation $x^2 - 2x + a = 0$ ....
   - B) Si $x = 2$ est l'une des racines de l'équation $ax^2 - 5x + a = 0$ ....

10. Trouve la valeur de a et b dans chacune des équations suivantes :
    - A) Si 2 et 5 sont les racines de l'équation $x^2 + ax + b = 0$ ....
    - B) Si -3 et 7 sont les racines de l'équation $ax^2 + 7x - 21 = 0$ ....
    - C) Si -1 et $\frac{3}{2}$ sont les racines de l'équation $ax^2 - x + b = 0$ ....
    - D) Si $\sqrt{3}\,i$ et $-\sqrt{3}\,i$ sont les racines de l'équation $x^2 + ax + b = 0$ ....

(11) **Détermine la nature des racines de chacune des équations suivantes, puis trouve l'ensemble solution dans chaque cas :**

A $x^2 + 2x - 35 = 0$

B $2x^2 + 3x - 7 = 0$

C $x(x - 4) + 5 = 0$

D $3x(3x - 8) + 16 = 0$

(12) **Trouve la valeur de c pour que les racines de l'équation $c\,x^2 - 12x + 9 = 0$ soient égales.**

(13) **Trouve la valeur de a pour que les racines de l'équation $x^2 - 3x - 2 + \frac{1}{a} = 0$ soient égales.**

(14) **Trouve la valeur de c pour que les racines de l'équation $3x^2 - 5x + c = 0$ soient égales, puis détermine ces deux racines.**

(15) **Trouve la valeur de k pour que l'une des racines de l'équation $x^2 + (k - 1)x - 3 = 0$ soit égale à l'opposé de l'autre racine.**

(16) **Trouve la valeur de k pour que l'une des racines de l'équation $4kx^2 + 7x + k^2 + 4 = 0$ soit égale à l'inverse de l'autre racine.**

(17) **Forme une équation du second degré dont les racines sont :**

A -2 et 4

B $-5i$ et $5i$

C $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$

D $1 - 3i$ et $1 + 3i$

E $3 - 2\sqrt{2i}$ et $3 + 2\sqrt{2i}$

(18) **Trouve une équation du second degré dont chacune des racines est le double d'une racine de l'équation $2x^2 - 8x + 5 = 0$**

(19) **Trouve une équation du second degré dont chaque racine dépasse de 1 l'une des racines de l'équation : $x^2 - 7x - 9 = 0$**

(20) **Trouve une équation du second degré dont chaque racine est égale au carré de l'une des racines de l'équation : $x^2 + 3x - 5 = 0$**

(21) **Si L et M sont les racines de l'équation $x^2 - 7x + 3 = 0$, trouve une équation du second degré dont les racines sont :**

A $2L$ et $2M$

B $L + 2$ et $M + 2$

C $\frac{2}{L}$ et $\frac{2}{M}$

D $L + M$ et LM

22 **Aires :** Un terrain a la forme d'un rectangle de dimensions 6 m et 9 m. On veut doubler l'aire du terrain en augmentant ses dimensions d'une même longueur. Trouve la longueur augmentée.

....

....

23 **Réflexion critique :** Trouve l'ensemble des valeurs de c pour que l'équation $7x^2 - 14x + c = 0$ ait :

A deux racines réelles différentes

B deux racines réelles égales.

C deux racines complexes.

....

....

....

....

24 **Déceler l'erreur :** Si L + 1 et M + 1 sont les racines de l'équation $x^2 + 5x + 3 = 0$, trouve une équation du second degré dont les racines sont L et M.

Réponse d'Amira

$\because L + M = -5, LM = 3$

$\therefore (L+1) + (M+1) = L + M + 2$

$= -5 + 2 = -3$

$\because (L+1)(M+1) = LM + (L + M) + 1$

$= 3 - 3 + 1 = 1$

l'équation est : $x^2 + 3x - 1 = 0$

Réponse de Youssef

$\because (L+1) + (M+1) = -5$

$\therefore L + M + 2 = -5 \quad \therefore L + M = -7.$

$\because (L+1)(M+1) = 3 \; \therefore LM + (L+M) + 1 = 3$

$\therefore LM - 7 + 1 = 3 \quad \therefore LM = 9$

l'équation est : $x^2 + 7x + 9 = 0$

Laquelle des deux solutions est juste ? Pourquoi ? ....

....

....

....

25 **Réflexion critique :** Si la différence entre les racines de l'équation $x^2 - kx + 2k = 0$ est égale au double du produit des racines de l'équation $x^2 - 3x + k = 0$, trouve la valeur de k.

....

....

....

....

Signe d'une fonction

1 - 5

1) Complète ce qui suit :

① Le signe de la fonction f telle que $f(x) = -5$ dans l'intervalle .... est ....

② Le signe de la fonction f telle que $f(x) = x^2 + 1$ dans l'intervalle .... est ....

③ La fonction f telle que $f(x) = x^2 - 6x + 9$ est positive dans l'intervalle ....

④ La fonction f telle que $f(x) = x - 2$ est positive dans l'intervalle ....

⑤ La fonction f telle que $f(x) = 3 - x$ est négative dans l'intervalle ....

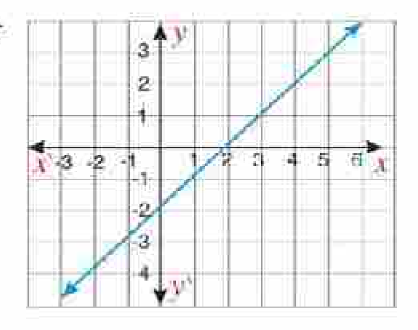
⑥ La fonction f telle que $f(x) = -(x - 1)(x + 2)$ est positive dans l'intervalle ....

⑦ La fonction f telle que $f(x) = x^2 + 4x - 5$ est négative dans l'intervalle ....

⑧ La figure ci-contre représente une fonction f du premier degré en x. Complète :

A $f(x)$ est positive dans l'intervalle ....

B $f(x)$ est négative dans l'intervalle ....

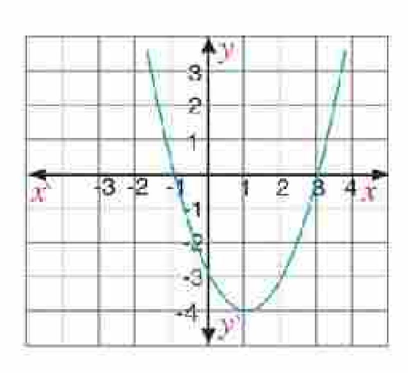


⑨ La figure ci-contre représente une fonction f du second degré en x. Complète :

A $f(x) = 0$ si $x \in$ ....

B $f(x) > 0$ si $x \in$ ....

C $f(x) < 0$ si $x \in$ ....



2) Réponds aux questions suivantes :

(10) Dans les exercices de (A) à (N), détermine le signe de chaque fonction :

(A) $f(x) = 2$	....	(B) $f(x) = 2x$	....
(C) $f(x) = -3x$	....	(D) $f(x) = 2x+4$	....
(E) $f(x) = 3 - 2x$	....	(F) $f(x) = x^2$	....
(G) $f(x) = 2x^2$	....	(H) $f(x) = x^2 - 4$	....
(I) $f(x) = 1 - x^2$	....	(J) $f(x) = (x-2)(x+3)$	....
(K) $f(x) = (2x-3)^2$	....	(L) $f(x) = x^2 - x - 2$	....
(M) $f(x) = x^2 - 8x - 16$	....	(N) $f(x) = -4x^2 + 10x - 25$	....

(11) Trace la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 - 9$ dans l'intervalle $[-3, 4]$. Du graphique, détermine le signe de $f(x)$.

(12) Trace la courbe représentative de la fonction $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ dans l'intervalle $[-3, 5]$. Du graphique, détermine le signe de $f(x)$.

(13) **Déceler l'erreur :** Si $f(x) = x + 1$, $g(x) = 1 - x^2$, détermine l'intervalle où les deux fonctions sont simultanément positives.

Réponse de Youssef

$x = -1$, alors $f(x) = 0$
$f(x)$ est positive dans l'intervalle $]-1, +\infty[$,
$x = \pm 1$, alors $g(x) = 0$
$g(x)$ est positive dans l'intervalle $]-1, 1[$
Donc les deux fonctions sont simultanément positives dans l'intervalle
$]-1, +\infty[\cup]-1, 1[=]-1, +\infty[$

Réponse d'Amira

$x = -1$, alors $f(x) = 0$
$f(x)$ est positive dans l'intervalle $]-1, -\infty[$,
$x = \pm 1$, alors $g(x) = 0$
$g(x)$ est positive dans l'intervalle $]-1, 1[$
Donc les deux fonctions sont simultanément positives dans l'intervalle
$]-1, +\infty[\cap]-1, 1[=]-1, 1[$

Laquelle des deux solutions est juste ? Représente chacune des deux fonctions graphiquement puis vérifie ta réponse ....

(14) **Mines d'or :** Dans la période de l'an 1990 à l'an 2010, la production d'une mine en milliers d'onces d'or est déterminée par la fonction f telle que $f(n) = 12n^2 - 96n - 480$ où n représente le nombre d'années et $f(n)$ représente la production.

1°) Étudie le signe de la fonction de la production f. ....

2°) Trouve, en milliers d'onces, la production de la mine d'or en 1990 et en 2005. ....

3°) En quelle année la production de la mine était égale à 2016 milles onces ? ....

Inéquation du second degré

1 - 6

Trouve l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes :

1) $x^2 \leqslant 9$

2) $x^2 - 1 \leqslant 0$

3) $2x - x^2 < 0$

4) $x^2 + 5 \leqslant 1$

5) $(x - 2)(x - 5) < 0$

6) $x(x + 2) - 3 \leqslant 0$

7) $(x - 2)^2 \leqslant -5$

8) $5 - 2x \leqslant x^2$

9) $x^2 \geqslant 6x - 9$

10) $3x^2 \leqslant 11x + 4$

11) $x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$

12) $7 + x^2 - 4x < 0$

Activité

1- En utilisant un logiciel de dessin, trace la courbe représentative de la fonction f telle que $f(x) = x^3 - 1$.

2- La figure suivante représente cette fonction. Du graphique, peux-tu trouver l'ensemble solution de l'équation $x^3 - 1 = 0$?

3- D'après tes connaissances sur les ensembles des nombres, peux-tu estimer l'existence d'autres racines ?

4- Peux-tu résoudre algébriquement l'équation $x^3 - 1 = 0$?

5- Utilise les méthodes de factorisation déjà étudiées pour résoudre cette équation. Tu as déjà étudié la factorisation d'une différence de deux cubes d'où $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 - x + 1) = 0$

6- On sait que si $a \times b \times c = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$ ou $c = 0$. Peux tu utiliser cette règle pour résoudre l'équation précédente ?

On remarque que $x - 1 = 0$ **d'où** $\boxed{x = 1}$ ce qui est conforme à la solution algébrique.

Peux-tu trouver les racines de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ par la méthode de la factorisation ?

7- Utilise la méthode du discriminant d'une équation du second degré pour déterminer la nature des racines de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ où $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$.

Le discriminant $(b^2 - 4ac) = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -3$ **d'où** $b^2 - 4ac < 0$

Les deux racines de l'équation sont des nombres complexes. Tu peux trouver ces deux racines suivant tes études sur les nombres complexes.

8- Résous l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes.

En utilisant la formule $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, on obtient $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2 \times 1}$

9- Ecris l'ensemble solution de l'équation $x^3 - 1 = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes. $\{1, \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2 \times 1}, \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2 \times 1}\}$

10- Quel est le nombre de racines réelles de cette équation et quel est le nombre de ses racines complexes ?

11- Calcule la somme des trois racines de l'équation. Que remarques-tu ?

12- Calcule le produit des trois racines de l'équation. Que remarques-tu ?

13- Calcule le carré de l'une des racines non réelles, puis compare le résultat avec l'autre racine.

14- Pourquoi la solution graphique a-t-elle donné une seule racine tandis que la solution algébrique donne trois racines de l'équation ? Explique ta réponse.

15- Utilise Internet pour chercher une méthode, adaptée à tes connaissances, pour représenter l'équation du troisième degré graphiquement,

Exercices généraux

1) Choisis la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1 L'ensemble solution de l'équation $x^2 - 6x + 9 = 0$, dans $\mathbb{R}$, est ....

A $\{-3\}$ **B** $\{3\}$ **C** $\{-3, 3\}$ **D** ϕ

2 L'ensemble solution de l'équation $x^2 + 4 = 0$ est ....

A $\{-2\}$ **B** $\{2\}$ **C** $\{-2, 2\}$ **D** $\{-2i, 2i\}$

3 La forme la plus simple de l'expression $(1 - i)^4$ est ....

A -4 **B** 4 **C** $-4i$ **D** $4i$

4 Si les racines de l'équation $x^2 - 4x + k = 0$ sont réelles différentes, alors ....

A $K > 4$ **B** $K < 4$ **C** $K = 4$ **D** $K \geqslant 4$

5 Si les racines de l'équation $x^2 - 12x + m = 0$ sont égales, alors m est égale à ....

A -36 **B** -6 **C** 6 **D** 36

6 L'équation du second degré ayant pour racines $2 - 3i$ et $2 + 3i$ est ....

A $x^2 + 4x + 13 = 0$ **B** $x^2 - 4x + 13 = 0$ **C** $x^2 + 4x - 13 = 0$ **D** $x^2 - 4x - 13 = 0$

7 Si $f : [-2 , 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ où $f(x) = 2 - x$, alors le signe de la fonction f est négatif dans ....

A $[-2 , 2[$ **B** $[-2 , 2]$ **C** $[2 , 4]$ **D** $]2 , 4]$

8 Si l'une des racines de l'équation $x^2 - (m + 2)x + 3 = 0$ est l'opposée de l'autre, alors m est égale à ....

A -3 **B** -2 **C** 2 **D** 3

9 Si l'une des racines de l'équation $2x^2 + 7x + k = 0$ est l'inverse de l'autre, alors k est égale à ....

A -7 **B** -2 **C** 2 **D** 7

10 L'ensemble solution de l'inéquation $x^2 + x - 2 < 0$ est ....

A $]-2 , 1[$ **B** $[-2 , 1]$ **C** $\mathbb{R} - [-2 , 1]$ **D** $\mathbb{R} -]-2 , 1[$

2) La figure suivante représente une fonction f du second degré :

11 Complète ce qui suit :

A L'ensemble image de la fonction f est ....

B La valeur maximale de la fonction f = ...

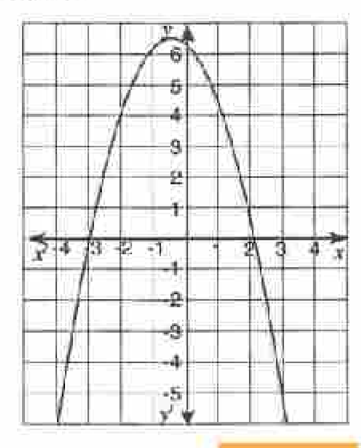
C La nature des racines de l'équation $f(x) = 0$ est ....

D L'ensemble solution de l'équation $f(x) = 0$ est ....

E $f(x) > 0$ si $x \in$ ....

F $f(x) < 0$ si $x \in$ ....

G $f(x) = 0$ si $x =$ ....



Exercices généraux

(12) Écris l'expression algébrique de la fonction passant par les points $(-4, 0)$, $(2, 0)$ et $(-1, 9)$.

....

3) Réponds aux questions suivantes :

(13) Détermine la nature des racines de chacune des équations suivantes, puis trouve l'ensemble solution de chaque équation :

A $x^2 - 2x = 0$ ....

B $(x - 1)^2 = 4$ ....

C $x^2 - 6x + 9 = 0$ ....

D $x^2 + 3x - 28 = 0$ ....

E $6x(x - 1) = 6 - x$ ....

(14) Résous les équations suivantes en utilisant la formule générale et en donnant le résultat à un centième près :

A $x^2 + 4x + 2 = 0$ ....

B $x^2 - 3(x - 2) = 5$ ....

(15) Trouve dans l'ensemble des nombres complexes l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

A $x^2 + 9 = 0$ ....

B $x^2 + 2x + 2 = 0$ ....

C $x^2 + 4x + 5 = 0$ ....

(16) Détermine la valeur de a et b dans chacun des cas suivants :

A $(7 - 3i) - (2 + i) = a + b\,i$

B $(2 - 5i)(3 + i) = a + b\,i$

C $\frac{10}{2 + i} = a + b\,i$

D $\frac{6 - 4i}{1 - i} = a + b\,i$

(17) Détermine la valeur de m dans chacun des cas suivants :

A si les racines de l'équation $2x^2 + mx + 18 = 0$ sont égales ....

B si l'une des racines de l'équation $x^2 + 3x + m = 0$ est le double de l'autre ....

(18) Étudie le signe de la fonction f dans chacun des cas suivants :

A $f(x) = x^2 - 2x - 8$ ....

B $f(x) = 4 - 3x - x^2$ ....

(19) Détermine l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes :

A $x^2 - x - 12 > 0$ ....

B $x^2 - 7x - 10 \leqslant 0$ ....

Epreuve de l'unité

1) Questions à choix multiples :

1 L'ensemble solution, dans $\mathbb{R}$, de l'équation $x^2 - 4x = -4$ est ....

A $\{-2\}$ **B** $\{2\}$ **C** $\{-2, 2\}$ **D** ϕ

2 L'ensemble solution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2 + 9 > 6x$ est ....

A R **B** $R - \{3\}$ **C** $]-3, 3[$ **D** $R - [-3, 3]$

3 Les deux racines de l'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$ sont ....

A réelles égales **B** réelles différentes

C complexes **D** complexes et conjuguées

4 L'équation du second degré dont les racines sont $(1 + i)$ et $(1 - i)$ est ....

A $x^2 - 2x + 2 = 0$ **B** $x^2 + 2x - 2 = 0$ **C** $x^2 + 2x + 2 = 0$ **D** $x^2 - 2x - 2 = 0$

2) Réponds aux questions suivantes :

5 Si $(a - 3)x^2 + (2 - a)x + 4 = 0$, trouve la valeur de a dans chacun des cas suivants :

A si l'une des racines de l'équation est l'opposée de l'autre. ....

....

B si la somme des racines de l'équation est égale à 6. ....

6 **A** Si $\frac{2}{L}$ et $\frac{2}{M}$ sont les racines de l'équation $x^2 - 6x + 4 = 0$, trouve l'équation du second degré dont les racines sont L et M. ....

B Étudie le signe de la fonction $f(x) = 8 - 2x - x^2$. ....

7 **A** Démontre que les racines de l'équation $x^2 + 3 = 5x$ sont réelles différentes, puis trouve, dans $\mathbb{R}$, l'ensemble solution de l'équation en donnant le résultat au millième près. ....

B Trouve l'ensemble solution de l'inéquation $x^2 - 5x - 14 \leqslant 0$ ....

8 **Applications physiques :** Un missile est projeté verticalement vers le haut à une vitesse de 96 m/s. Si la relation entre la distance d parcourue en mètres et le temps t mesuré en secondes est donnée par la relation $d = 98t - 4{,}9\,t^2$, trouve :

A la distance parcourue par le missile en deux secondes. ....

B le temps pris par le missile pour parcourir une distance de 470,4 mètres. Comment expliques tu l'existence de deux réponses ?

Épreuve cumulative

1 Trouve la valeur de k pour que l'équation $3x^2 + 4x + k = 0$ ait deux racines :

A réelles égales .... **B** réelles différentes ....

C complexes ....

2 Trouve la valeur de k pour que :

A l'une des racines de l'équation $x^2 - kx + k + 2 = 0$ soit égale au double de l'autre racine

B l'une des racines de l'équation $x^2 - kx + 8 = 0$ dépasse l'autre racine de 2

C l'une des racines de l'équation $x^2 - kx + 3 = 0$ dépasse l'inverse de l'autre racine de 1

3 Si L et M sont les racines de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$, trouve l'équation du second degré dont les racines sont :

A 3 L et 3 M **B** L + 1 et M + 1 **C** $\frac{1}{L}$ et $\frac{1}{M}$ **D** L + M et L.M

....

4 Si $\frac{1}{L}$ et $\frac{1}{M}$ sont les racines de l'équation $6x^2 - 5x + 1 = 0$, trouve l'équation du second degré dont les racines sont L et M.

....

5 Trace la courbe représentative de la fonction f telle que $f(x) = x^2 - 4$ dans l'intervalle $[-3 , 3]$. Du graphique, détermine le signe de la fonction f dans cet intervalle.

6 Trace la courbe représentative de la fonction f telle que $f(x) = 6 - 5x - 4x^2$ dans l'intervalle $[-2 , 3]$ Du graphique, détermine le signe de la fonction f dans cet intervalle.

7 Trouve l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes :

A $x^2 + 4x + 4 < 0$ **B** $x^2 - 6x > -5$ **C** $(x - 2)^2 \leqslant -9$

....

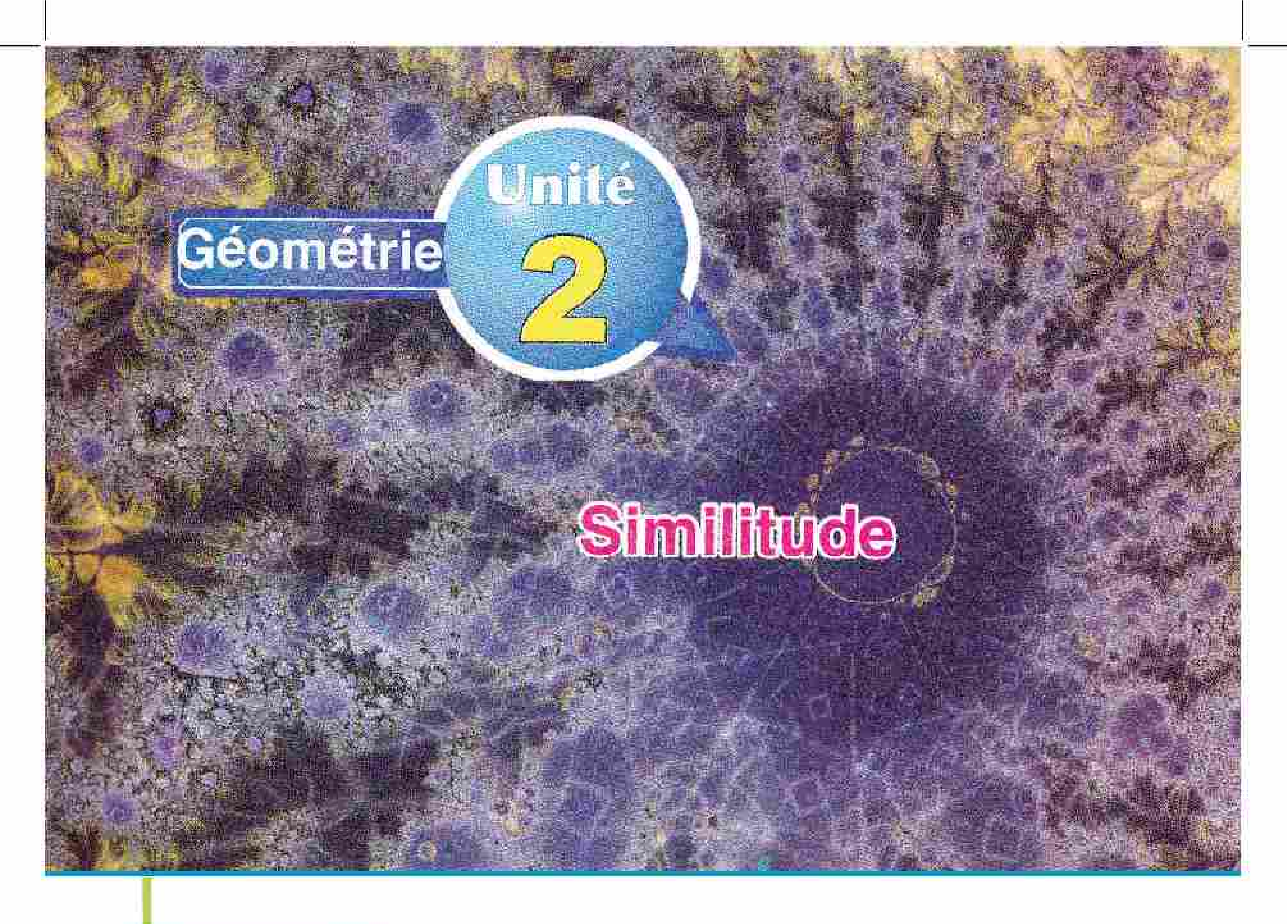
D $3 - 2x \geqslant x^2$ **E** $x^2 \leqslant 10x - 25$ **F** $2x^2 - 7x \leqslant 15$

....

8 Si $a = 1 + \sqrt{3}\, i$, $b = 1 - i$ et $c = -2 - \sqrt{3} + i$, démontre que $c - b = (a - b)i$

En cas de difficulté à répondre à l'une des questions, utilise le tableau suivant :

N° de la question	1		2	3	4	5	6	7	8
N° de la leçon	a, b	c	1-4	1-4	1-4	1-5	1-5	1-6	1-2
	1-3	1-2							



Leçons de l'unité

Leçon (2 - 1): Similitude des triangles.

Leçon (2 - 2): Similitude des polygones.

Leçon (2 - 3): Relation entre les aires de deux polygones semblables.

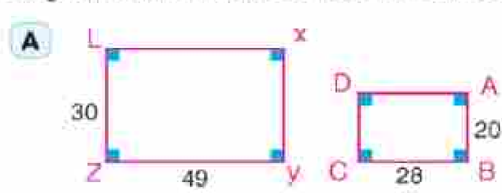
Leçon (2 - 4): Application de la similitude dans le cercle.



2 - 1 Similitude des triangles

1 Lesquelles des pairs de polygones suivants sont semblables? Écris les polygones semblables en ordonnant les sommets correspondants puis détermine le coefficient de proportionnalité. (les longueurs sont mesurées en centimètres) .

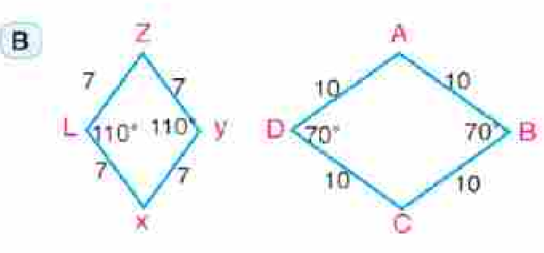
A



....

....

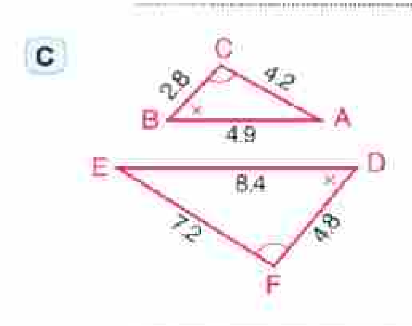
B



....

....

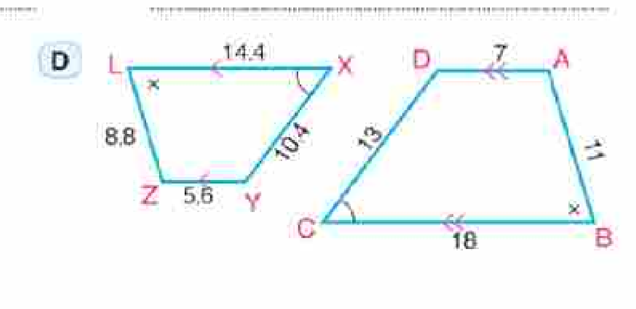
C



....

....

D



....

....

2 Si polygone ABCD ~ polygone XYZL, complète :

A $\frac{AB}{BC} = \frac{\dots\dots}{YZ}$

B AB × ZL = XY × ....

C $\frac{BC + YZ}{YZ} = \frac{\dots\dots + LX}{LX}$

D $\frac{\text{Périmètre du polygone} \dots\dots}{\text{Périmètre du polygone} \dots\dots} = \frac{XY}{AB}$

3 Le polygone ABCD est semblable au polygone XYZL, Si AB = 32cm, BC = 40 cm, XY = 3m - 1 et YZ = 3m + 1, trouve la valeur numérique de m. ....

....

4 Soit un rectangle de dimensions 10 cm et 6 cm. Calcule le périmètre et l'aire d'un rectangle qui lui est semblable si :

A le rapport de similitude est 3.

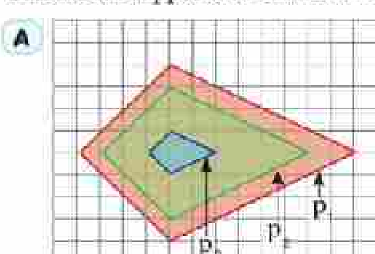
B le rapport de similitude est 0.4

....

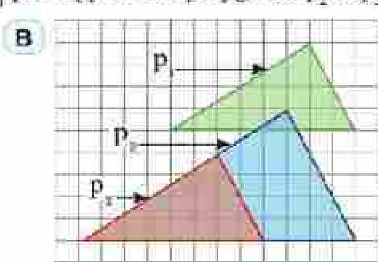
....

5 Dans chacune des figures suivantes, polygone $P_1 \sim$ polygone $P_2 \sim$ polygone P_3.
Calcule les rapports de similitude du polygone p_1 par rapport aux polygones p_2 et p_3.

A



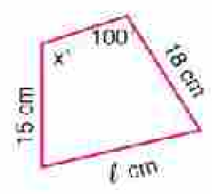
B

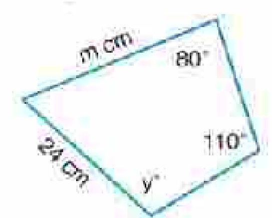


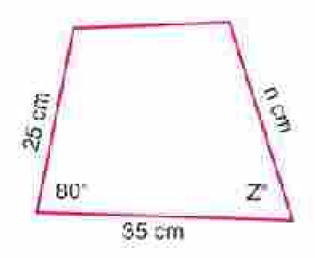
....

....

6 Les trois polygones suivants sont semblables. Trouve la valeur numérique du symbole utilisé pour la mesure.





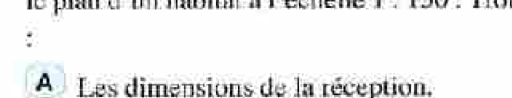


....

7 Une boîte a la forme d'un rectangle d'or de longueur 16,2 cm. Calcule la largeur de la boîte à un centimètre près. ....

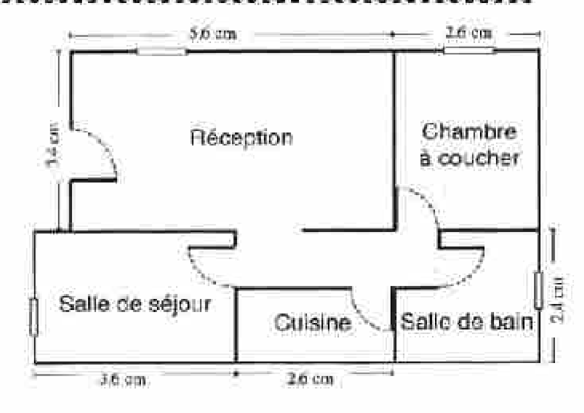
8 Soient deux rectangles semblables dont le premier a pour dimensions 8 cm et 12 cm. Le périmètre du second rectangle est 200 cm. Calcule la longueur du second rectangle et son aire.

....



Activité

9 **Architecture :** La figure ci-contre représente le plan d'un habitat à l'échelle 1 : 150 . Trouver :



A Les dimensions de la réception.

....

B Les dimensions de la chambre à coucher.

....

C Les dimensions de la salle de séjour.

....

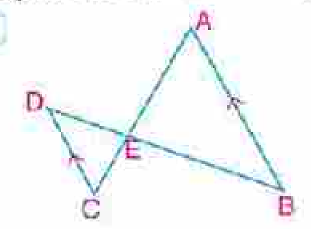
D L'aire de l'habitat.

....

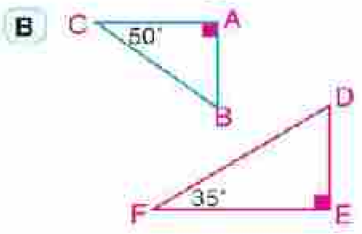
2 - 2 Similitude des polygones

1 Lesquels des cas suivants représentent deux triangles semblables. Justifie ta réponse.

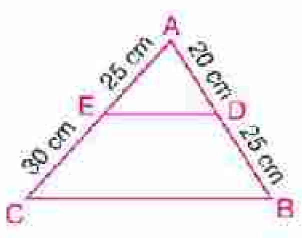
A



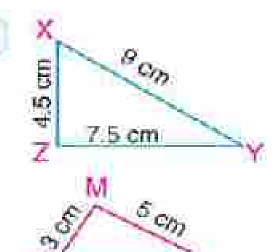
B



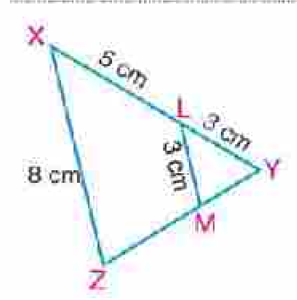
C



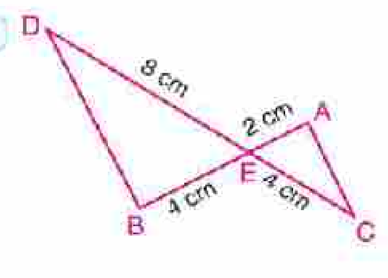
D



E

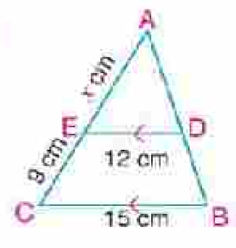


F

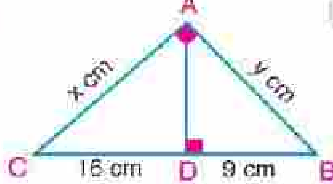


2 Trouve la valeur numérique du symbole utilisé pour la mesure :

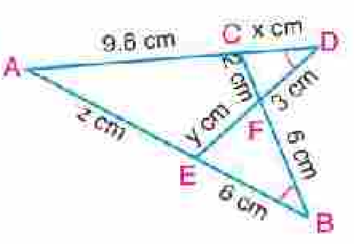
A



B



C



3 **Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle rectangle et $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

1) Complète : $\triangle ABC \sim \triangle \ldots \sim \triangle \ldots$

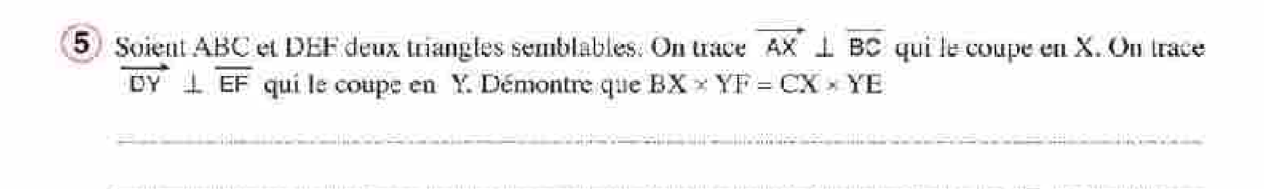
2) Si x, y, z, l, m et n sont les longueurs des segments indiqués sur la figure en centimètres, complète les proportions suivantes :



A $\frac{x}{z} = \frac{m}{\ldots}$ **B** $\frac{x}{z} = \frac{l}{\ldots}$ **C** $\frac{m}{l} = \frac{x}{\ldots}$ **D** $\frac{l}{\ldots} = \frac{\ldots}{l}$

E $\frac{x}{\ldots} = \frac{\ldots}{x}$ **F** $\frac{\ldots}{y} = \frac{y}{\ldots}$ **G** $\frac{l}{x} = \frac{\ldots}{z}$ **H** $\frac{l}{x} = \frac{\ldots}{y}$

4 $\overline{AB}$ et $\overline{DC}$ sont deux cordes d'un cercle, $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{DC} = \{E\}$, où E est à l'extérieur du cercle. Si AB = 4cm, DC = 7cm et BE = 6cm. démontre que $\triangle ADE \sim \triangle CBE$, puis trouve la longueur de $\overline{CE}$

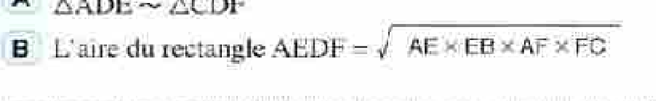


5 Soient ABC et DEF deux triangles semblables. On trace $\overrightarrow{AX} \perp \overline{BC}$ qui le coupe en X. On trace $\overrightarrow{DY} \perp \overline{EF}$ qui le coupe en Y. Démontre que $BX \times YF = CX \times YE$

6 Soit $\triangle$ ABC un triangle tel que AC > AB, M $\in \overline{AC}$ tel que m($\angle$ABM) = m ($\angle$C).
Démontre que $(AB)^2 = AM \times AC$.

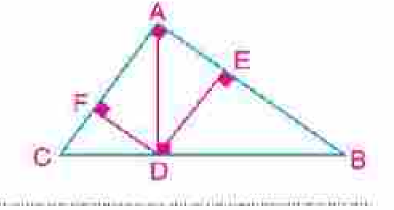
7 Soit ABC un triangle rectangle en A. On trace $\overrightarrow{AD} \perp \overline{BC}$ qui le coupe en D.
Si $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$ et AD = $6\sqrt{2}$ cm. trouve la longueur de $\overline{BD}$, $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$.

8 **Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle rectangle en A.
$\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ et $\overline{DF} \perp \overline{AC}$. Démontre que :



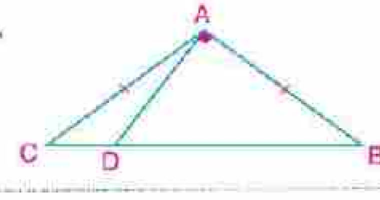
A $\triangle ADE \sim \triangle CDF$

B L'aire du rectangle AEDF = $\sqrt{AE \times EB \times AF \times FC}$



9 **Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle obtusangle en A, AB = AC. On trace $\overrightarrow{AD} \perp \overline{AB}$ qui coupe $\overline{BC}$ en D.

Démontre que : $2(AB)^2 = BD \times BC$



....

....

....

10 Les deux groupes (A) et (B) représentent des longueurs de côtés de différents triangles en centimètres. Ecris devant chaque triangle du groupe (A), la lettre correspondant au triangle qui lui est semblable du groupe (B) :

Groupe (A)

1	6 ,	6 ,	6
2	5 ,	7 ,	11
3	5 ,	8 ,	10
4	7 ,	8 ,	12
5	16 ,	27 ,	28

Groupe (B)

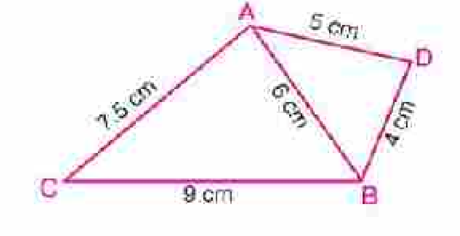
A	2.5 ,	4 ,	5
B	8 ,	13.5 ,	14
C	25 ,	35 ,	55
D	11 ,	11 ,	11
E	3.5 ,	4 ,	6
F	8 ,	6 ,	10
G	32 ,	54 ,	42

11 **Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle tel que AB = 6cm , BC = 9cm et AC = 7.5cm.

D est un point extérieur au triangle ABC tel que DB = 4cm et DA = 5cm. Démontre que :

A $\triangle ABC \sim \triangle DBA$

B $\overrightarrow{BA}$ est une bissectrice de $\angle$ DBC



....

....

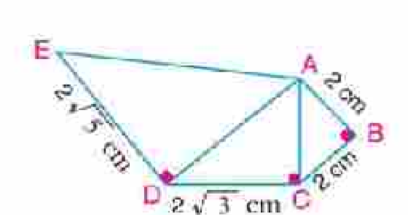
12 **Dans la figure ci-contre, complète :**

$\triangle ABC \sim \triangle$ ....

et le rapport de similitude = ...

....

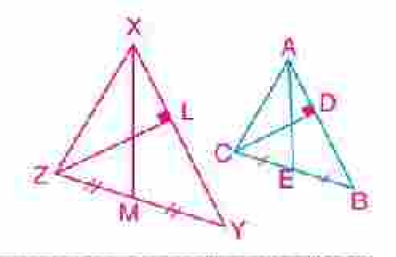
....



13 **Dans la figure ci-contre,** $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

E est le milieu de $\overline{BC}$, M est le milieu de $\overline{YZ}$,

$\overline{CD} \perp \overline{AB}$ et $\overline{ZL} \perp \overline{XY}$. Démontre que :





A $\triangle AEC \sim \triangle XMZ$

B $\frac{CD}{ZL} = \frac{AE}{XM}$

....

....

14 Soient ABC et XYZ deux triangles semblables tels que , AB > AC et XY > XZ.

E et L sont les milieux de $\overline{BC}$ et $\overline{YZ}$ respectivement. On trace $\overline{AF} \perp \overline{BC}$ qui le coupe en F et $\overline{XM} \perp \overline{YZ}$ qui le coupe en M Démontre que $\triangle AEF \sim \triangle XLM$

....

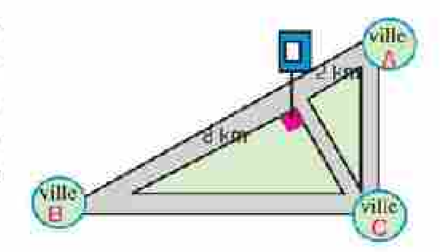
15 Soit ABC un triangle, $D \in \overline{BC}$ tel que $(AD)^2 = BD \times DC$ et $BA \times AD = BD \times AC$. Démontre que:

A $\triangle ABD \sim \triangle CAD$

B $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

C $m(\angle BAC) = 90°$

16 Le plan ci-contre montre la position d'une station d'essence qu'on veut construire sur l'autoroute dans un carrefour d'un chemin de contournement qui conduit à la ville C, perpendiculaire à l'autoroute joignant les deux villes A et B. Sachant que la route joignant les villes A et B et la route joignant les villes B et C sont perpendiculaires :



A Quelle sera la distance entre la station et la ville C?

B Quelle sera la distance entre les deux villes B et C?

....

....

Activité

Utilise le logiciel « Google Earth » pour calculer la plus courte distance entre les différentes capitales des gouvernorats de la République Arabe d'Egypte

2 - 3 Relation entre les aires de deux polygones semblables

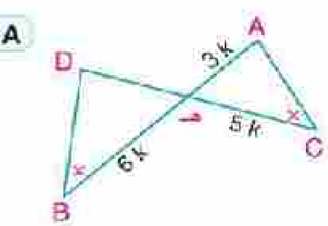
1 Complète :

A Si $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$ et $AB = 3\,XY$, alors $\frac{A(\triangle XYZ)}{A(\triangle ABC)} = $ ....

B Si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $A(\triangle ABC) = 9\,A(\triangle DEF)$ et $DE = 4$cm, alors $AB = $ .... cm

2 Observe chacune des figures suivantes où k est une constante , puis complète :

A

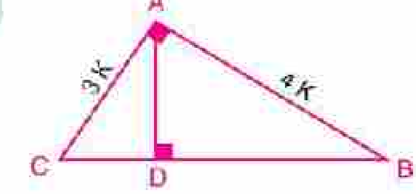


$\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\}$

$A(\triangle ACE) = 900$ cm²

Alors $A(\triangle DEB) = $ .... cm²

B



$m(\angle BAC) = 90°$, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

$A(\triangle ADC) = 180$ cm² Alors :

$A(\triangle ABC) = $ .... cm²

3 Soit ABC un triangle. $D \in \overline{AB}$ tel que $AD = 2\,BD$ et $E \in \overline{AC}$ tel que $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$

Si l'aire du triangle $\triangle ADE = 60$cm², trouve l'aire du trapèze DBCE.

....

....

4 Soit ABC un triangle rectangle en B. On trace les triangles équilatéraux ABX, BCY, et ACZ à l'extérieur du triangle ABC. Démontre que $A(\triangle ABX) + A(\triangle BCY) = A(\triangle ACZ)$.

....

....

5 Soit ABC un triangle tel que $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$. On trace le cercle passant par ses sommets. Du point B on trace la tangente au cercle qui coupe $\overrightarrow{AC}$ en E.

Démontre que: $\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle ABE)} = \frac{7}{16}$

....

....

6 Soit ABCD un parallélogramme. $X \in \overrightarrow{AB}$ et $X \notin \overline{AB}$, tel que BX = 2 AB, $Y \in \overrightarrow{CB}$ et $Y \notin \overline{CB}$, tel que BY = 2 BC. On trace le parallélogramme BXZY. Démontre que : $\frac{A(ABCD)}{A(XBYZ)} = \frac{1}{4}$

7 Soit ABC un triangle rectangle en B, $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ qui le coupe en D. On trace les carrés AXYB et BMNC sur les côtés $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ respectivement à l'extérieur du triangle ABC:

A Démontre que le polygone DAXY B ~ polygone DBMNC

B Si AB = 6cm et AC = 10cm, calcule le rapport entre les aires des deux polygones.

8 Soit ABC un triangle , $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ et $\overline{AC}$ sont trois côtés correspondants dans trois triangles semblables X, Y et Z construits respectivement sur les trois côtés du triangle ABC à l'extérieur du triangle. Si l'aire du polygone X = 40 cm², l'aire du polygone Y = 85 cm² et l'aire du polygone Z = 125cm².

démontre que le triangle ABC est rectangle.

9 Soit ABCD un carré. Les points X, Y, Z et L partagent les segments $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ et $\overline{DA}$ respectivement dans le rapport 1 : 3.
Démontre que :

A le quadrilatère XYZL est un carré

B $\frac{\text{Aire du carré XYZL}}{\text{Aire du carré ABCD}} = \frac{5}{8}$

10 Une salle de gymnastique rectangulaire a pour dimensions 8 mètres et 12 mètres. On a recouvert son sol par du parquet qui a coûté 3200 Livres. Calcule (en utilisant la similitude) le coût du recouvrement d'une autre salle rectangulaire de dimensions 14 mètres et 21 mètres avec la même sorte du parquet et au même prix.



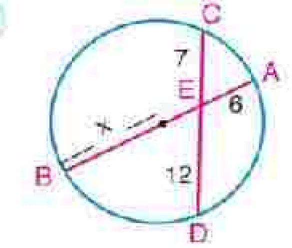
2 - 4 Application de la similitude dans le cercle

① En utilisant une calculatrice ou par le calcul mental, trouve la valeur numérique de x dans chacun des cas suivants (les longueurs sont mesurées en centimètres) :

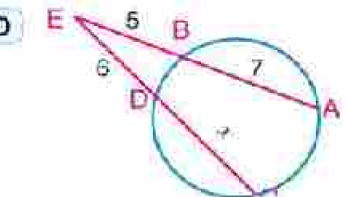
A

B

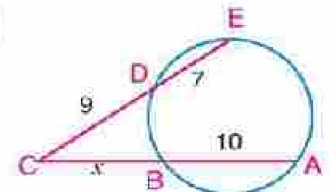
C



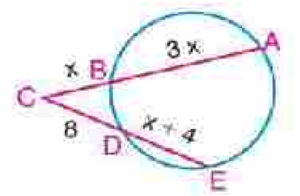
D



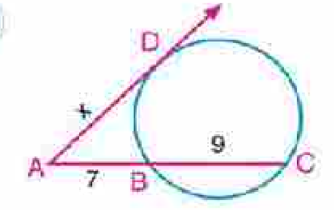
E



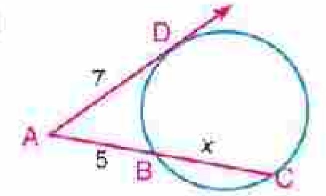
F



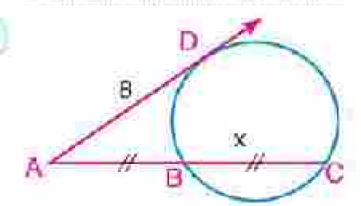
G



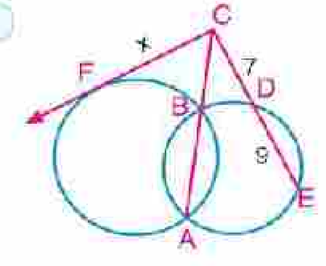
H



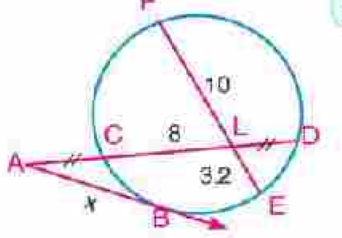
I



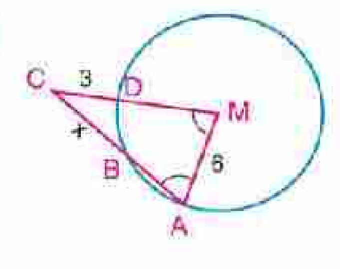
J



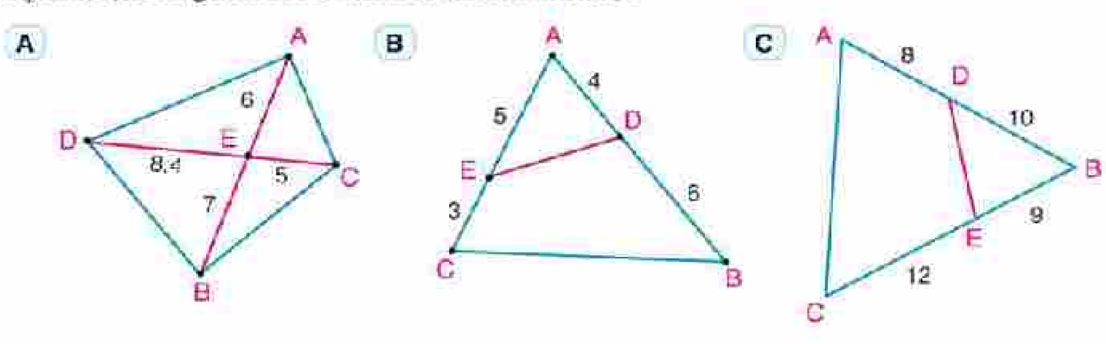
K



L

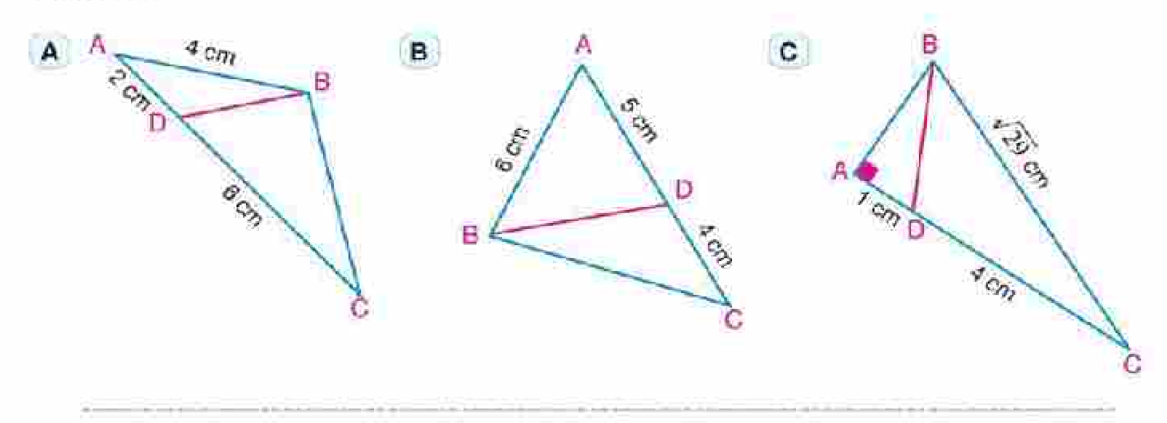


2 Dans lesquelles des figures suivantes, les points A , B , C et D sont-ils cocycliques ? Explique ta réponse. (les longueurs sont mesurées en centimètres) :



....

3 Dans lesquelles des figures suivantes, $\overline{AB}$ est-elle une tangente au cercle passant par les points B, C et D.



....

4 Soient deux cercles sécants en A et B. C ∈ $\overleftrightarrow{AB}$ et C ∉ $\overline{AB}$, Du point C, on trace les deux segments $\overline{CX}$ et $\overline{CY}$ tangents au cercle en X et Y . Démontre que CX = CY.

....

....

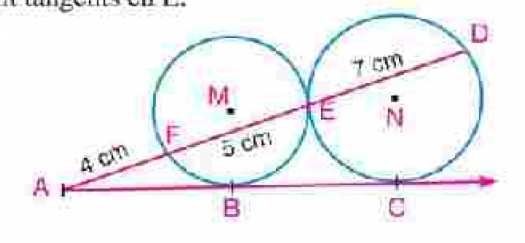
....

5 **Dans la figure ci-contre,** les deux cercles M et N sont tangents en E.

$\overrightarrow{AC}$ est une tangente au cercle M en B et au cercle N en C. $\overrightarrow{AE}$ est une sécante aux deux cercle M et N en F et D respectivement.

Si AF = 4 cm, FE = 5 cm et ED = 7 cm,

Démontre que B est le milieu de $\overline{AC}$



....

....

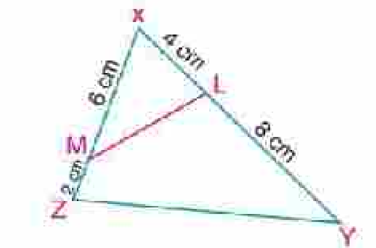
....

6 **Dans la figure ci-contre,** $L \in \overline{XY}$ tel que $XL = 4cm$, $YL = 8cm$, $M \in \overline{XZ}$ tel que $XM = 6cm$ et $ZM = 2cm$

Démontre que :

A $\triangle XLM \sim \triangle XZY$

B La figure LYZM est un quadrilatère inscriptible.



....

....

....

7 $\overline{AB} \cap \overline{CE} = \{E\}$, $AE = \frac{5}{12}$ BE et $DE = \frac{3}{5}$ EC. si $BE = 6cm$ et $CE = 5cm$.

démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.

....

....

8 Soit ABC un triangle. $D \in \overline{BC}$ tel que $DB = 5cm$ et $DC = 4cm$. si $AC = 6cm$. démontre que :

A $\overline{AC}$ est une tangente au cercle passant par les points A, B et D.

B $\triangle ACD \sim \triangle BCA$

C $A(\triangle ABD) : A(\triangle ABC) = 5 : 9$

....

....

....

....

9 Soient deux cercles concentriques de centre M de longueurs de rayons 12 cm et 7 cm. On trace la corde $\overline{AD}$ dans le grand cercle qui coupe le petit cercle en B et C respectivement.

Démontre que $AB \times BD = 95$

....

....

....

10 Soit ABCD un rectangle tel que $AB = 6cm$ et $BC = 8cm$. On trace $\overrightarrow{BE} \perp \overline{AC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en E et $\overline{AD}$ en F.

A Démontre que $(AB)^2 = AF \times AD$.

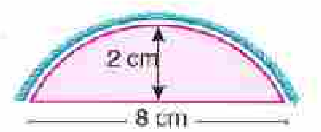
B Trouve la longueur de $\overline{AF}$.

....

....

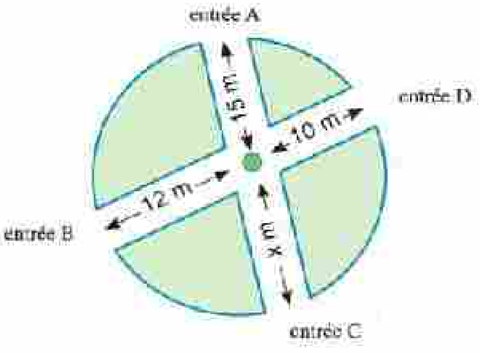
....

11 **Lien avec l'industrie :** L'engrenage d'une machine s'est cassé. Pour le changer, il est demandé de calculer la longueur de son rayon. La figure ci-contre montre une partie de l'engrenage. Détermine la longueur de son rayon.? ....



....

12 **Lien avec l'environnement :** La figure ci-contre montre le plan d'un jardin circulaire ayant deux couloirs au croissement desquels se situe une fontaine. Trouve la distance de la fontaine à l'entrée C ?.



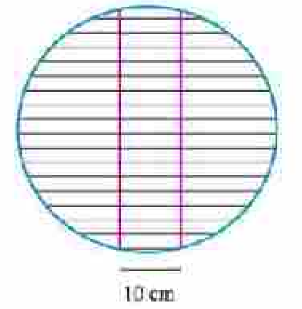
....

....

....

13 **Lien avec la vie quotidienne :** Hoda utilise une grille circulaire métallique pour griller la viande. La longueur de son rayon est 50 cm. Elle est tenue par deux fils métalliques parallèles de même longueur distants de 10 cm comme l'indique la figure ci-contre.

Calcule la longueur de chacun des deux fils

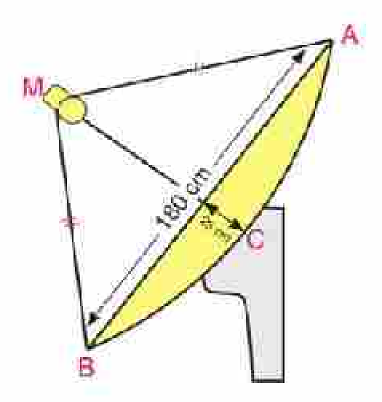


....

....

14 **Lien avec la communication :** Les satellites diffusent les programmes télévisés à toute la planète. On utilise des antennes paraboliques pour la réception de la télédiffusion. Ce sont des antennes concaves sous la forme d'une partie de la surface d'une sphère.

La figure ci-contre, montre une section d'une parabole de longueur de rayon 180 cm. Calcule MA, la longueur du rayon de la sphère.



....

....

Exercices généraux

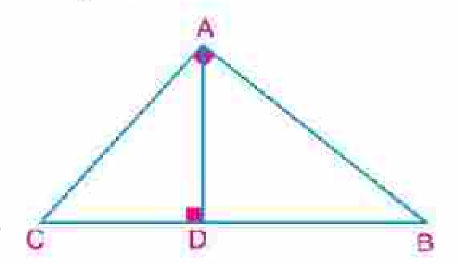
1 **Dans la figure ci-contre,** laquelle des expressions suivantes n'est pas vraie?:

A $(AD)^2 = DB \times DC$

B $(AB)^2 = BD \times BC$

C $AC \times BC = AB \times AD$

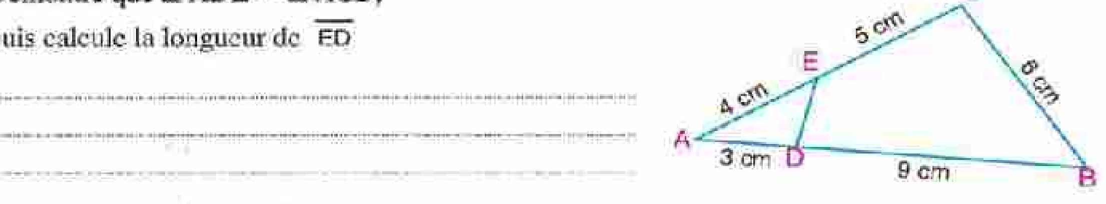
D $AB \times AC = AD \times BC$



2 **Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle, $D \in \overline{AB}$ et $E \in \overline{AC}$.

Démontre que $\triangle ADE \sim \triangle ACB$,

puis calcule la longueur de $\overline{ED}$



3 **Dans la figure ci-contre,** $\overline{AB}$ est un diamètre d'un cercle de centre M, de longueur 12cm.

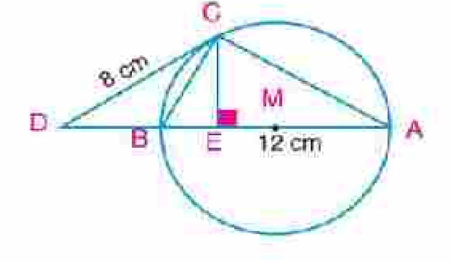
$D \in \overrightarrow{AB}$ où AD = 16cm et C appartient au cercle où CD = 8cm. $\overline{CE} \perp \overline{AB}$.

Démontre que :

A $\overline{CD}$ est tangent au cercle M.

B $\triangle DCB \sim \triangle DAC$

C CE = 4,8 cm



4 Soit ABC un triangle rectangle en B. $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ Qui le coupe en D, AB = 15cm et AD = 9cm. Sur les deux côtés $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$, on construit les deux carrés ABYX et BCEF à l'extérieur du triangle.

A Démontre que polygone DAXYB ~ polygone DBFEC.

B Calcule A (polygone DAXYB) : A (polygone DBFEC)

Exercices généraux

5 **Dans la figure ci-contre,** M et N sont deux cercles qui se coupent en A et B.

$\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} \cap \overrightarrow{EF} = \{X\}$ où

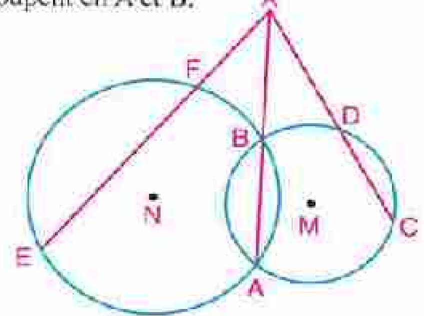
XD = 2 DC, EF = 10 cm et FX = 6 cm

A Démontre que le quadrilatère CDFE est inscriptible.

B Trouve la longueur de $\overline{CD}$

....

....



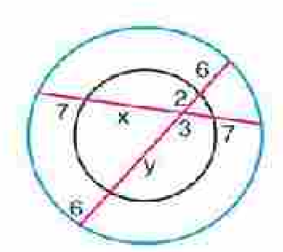
6 **Dans la figure ci-contre,** les deux cercles sont concentriques,

Les longueurs indiquées sont mesurées en centimètres. Trouve la valeur numérique de x et y.

....

....

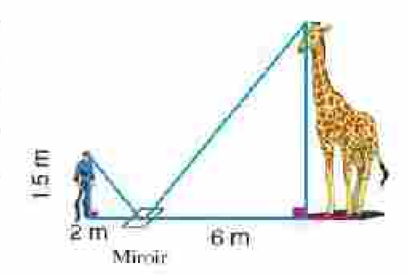
....



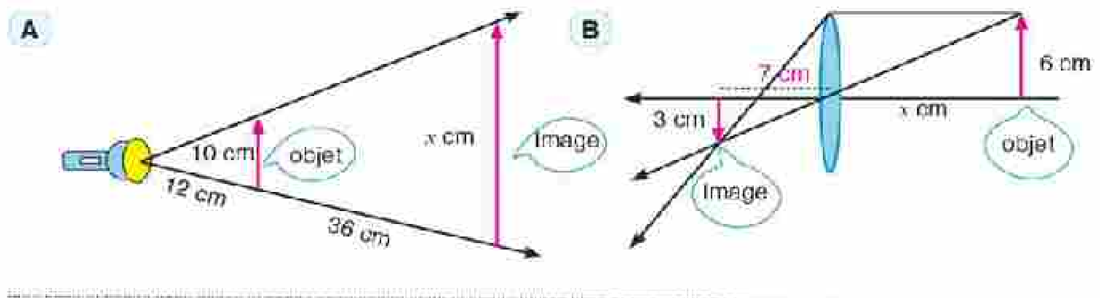
7 **Jardin zoologique :** Lors d'une excursion scolaire au jardin zoologique, Hossam voulait déterminer la taille d'une girafe. Il a posé un miroir sur le sol à une distance de 6 mètres de la girafe. Puis il a reculé jusqu'à ce qu'il ait pu voir la tête de la girafe à travers le centre du miroir. Dans cette position, la distance de Hossam au miroir était de 2 mètres. Si lui, le miroir et la girafe sont alignés et si sa taille est de 1,5 mètre, calcule la taille de la girafe.

....

....



8 **Activité : Lien avec la physique :** Calcule le rapport de l'homothétie et la valeur numérique de x dans chacune des figures suivantes :



....

....

Epreuve de l'unité

1 Complète ce qui suit :

A Deux polygones semblables à un même troisième sont ....

B Si les longueurs côtés correspondants dans deux triangles sont proportionneles, alors les deux triangles sont ....

C Si le rapport entre les périmètres de deux polygones est 3 : 5 , alors le rapport entre leurs aires est ....

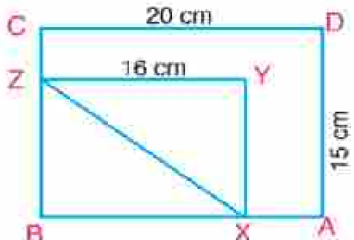
D Si deux cordes $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ se coupent en un point X , alors :

.... × .... = ... × ....

E Si rectangle ABCD ~ rectangle XBZY,

AD = 15cm, CD = 20cm et YZ = 16cm

alors : XZ = ...



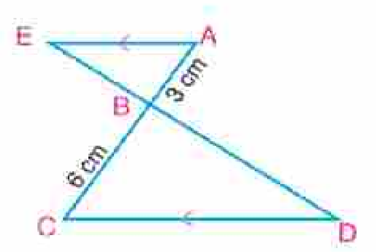
2 **Dans la figure ci-contre,** $\overline{AE}$ // $\overline{DC}$, $\overline{AC}$ ∩ $\overline{ED}$ = {B},

AB = 3cm, BC = 6cm et ED = 12cm.

trouve la longueur de $\overline{EB}$

....

....



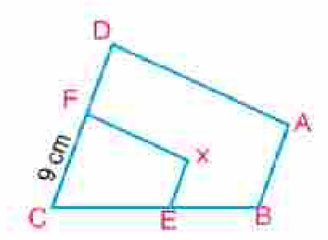
3 **Dans la figure ci-contre,** polygone ABCD ~ polygone XECF.

Démontre que $\overline{AB}$ // $\overline{XE}$.

Si XE = $\frac{1}{2}$ AB et CF = 9 cm, trouve la longueur de $\overline{FD}$

....

....



4 Soit ABC un triangle. X ∈ $\overline{AB}$ tel que AX = 8cm, XB = 12cm

Y ∈ $\overline{AC}$, tel que AY = 10cm et YC = 6cm.

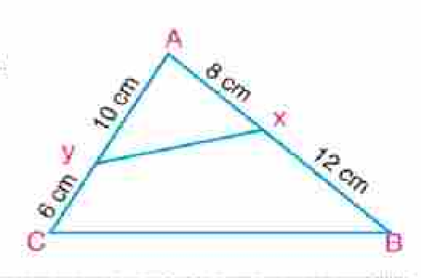
Démontre que :

A △ ABC ~ △ AYX

B le quadrilatère XBCY est inscriptible.

....

....



5 $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont deux cordes sécantes dans un cercle qui se coupent en E. Si E est le milieu de $\overline{AB}$, CE = 4cm et ED = 9cm, trouve la longueur de $\overline{AB}$.

....

Épreuve cumulative

Questions à choix multiples

1 Si $\frac{2x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$, alors 11 - x est égal à :

A −10 B 0 C 5 D 10

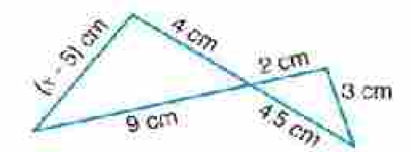
2 **Dans la figure ci-contre**, x est égale à :

A 32 B 18
C 27 D 51



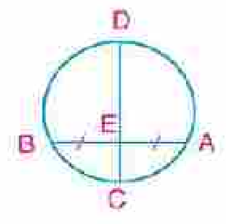
3 **Dans la figure ci-contre,** x est égale à :

A 5 B 11
C 12 D 14



4 **Dans la figure ci-contre,** AB = 12cm et CE = 4 cm. ED est égale à :

A 5 cm B 6 cm
C 8 cm D 9 cm

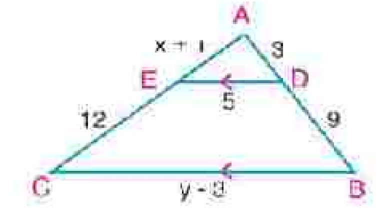


5 Soient deux rectangles semblables. Les dimensions du premier sont 10 cm et 8 cm. Si le périmètre du second rectangle est 108 cm, alors sa longueur est égale à :

A 18 cm B 24 cm C 30 cm D 36 cm

Questions à réponses courtes:

6 **Dans la figure ci-contre,** trouve la valeur de x et y sachant que les longueurs sont mesurées en centimètres



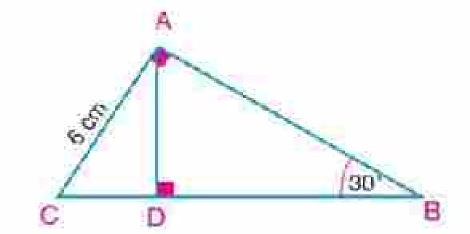
7 Soit ABC un triangle tel que AB = AC, D ∈ $\overline{BC}$. On trace $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ Qui le coupe en E et $\overline{DF} \perp \overline{AC}$ Qui le coupe en F. Démontre que : $\frac{BE}{CF} = \frac{DE}{DF}$

Épreuve cumulative

8 **Dans la figure ci-contre,** $\overline{AB} \perp \overline{AC}$ et $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

m($\angle$ B) = 30° et A C = 6 cm

Trouve la longueur de : $\overline{AB}$, $\overline{BD}$ et $\overline{AD}$



Questions à réponses longues:

9 Soit ABCD un trapèze tel que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. Si ses diagonales se coupent en E, démontre que $\frac{AE}{EC} = \frac{DE}{EB}$

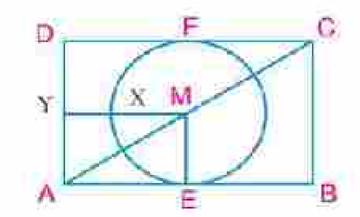
10 **Dans la figure ci-contre,** ABCD est un rectangle.

Le cercle M de longueur de rayon 6 cm est tangent à $\overline{AB}$ en E et à $\overline{CD}$ en F.

On trace $\overrightarrow{MY} \parallel \overline{AB}$ qui coupe le cercle en X et $\overline{AD}$ en Y.

Si : XY = 2cm et $\frac{A(\triangle AEM)}{A(\triangle ABC)} = \frac{1}{4}$,

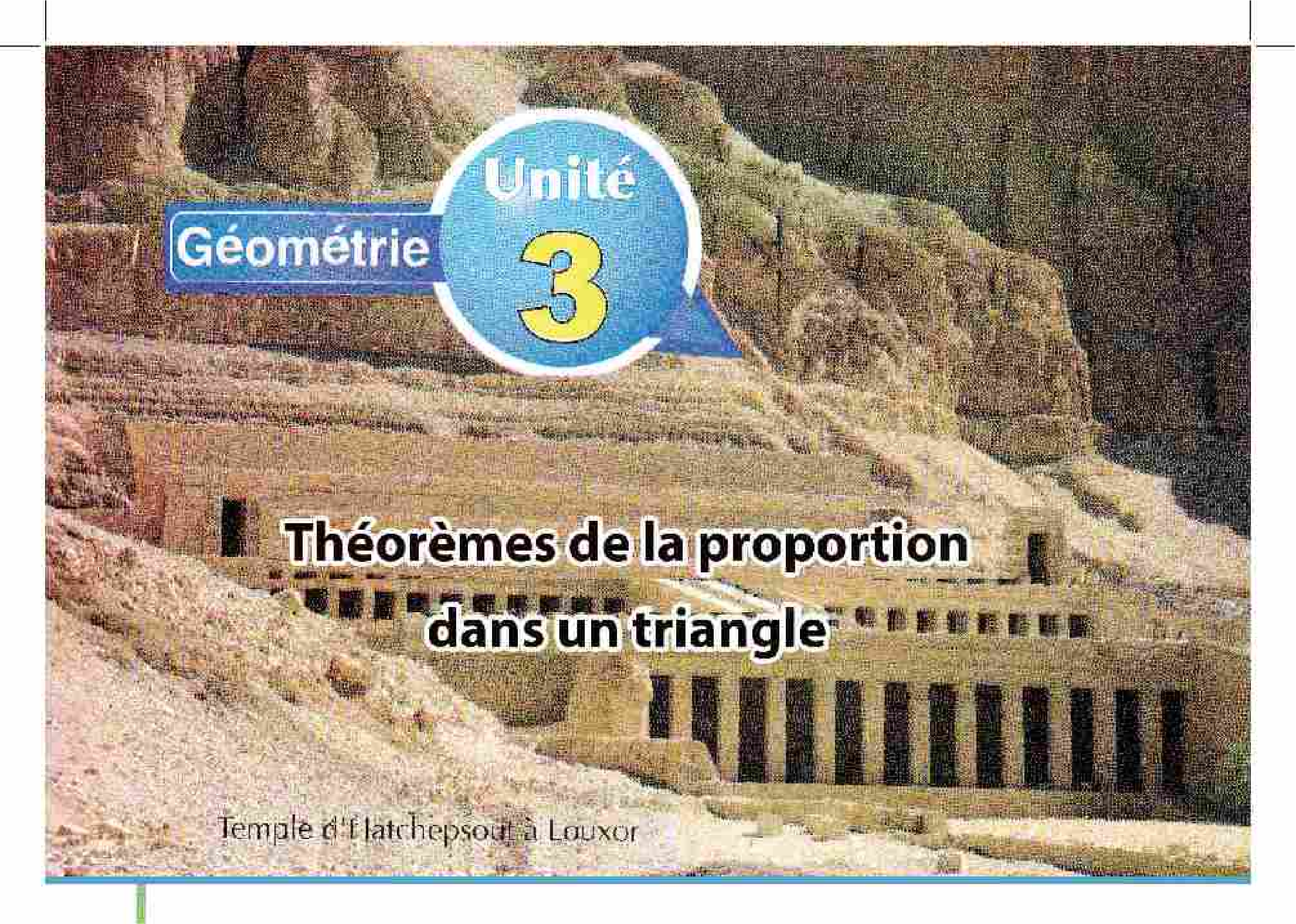
trouve la longueur de $\overline{BE}$ et $\overline{BC}$



As-tu besoin d'aide ?

En cas de difficulté à répondre à l'une des questions, utilise le tableau suivant :

N° de la question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N° de la leçon	1	Compétences	3	5	2	3	3	3	3	4



Temple d'Hatchepsout à Louxor

Leçons de l'unité

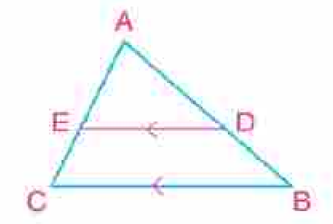
Leçon (3 - 1): Droites parallèles et parties proportionnelles.

Leçon (3 - 2): Bissectrice de l'angle et parties proportionnelles.

Leçon (3 - 3): Applications de la proportionnalité dans un cercle.

3 - 1 Droites parallèles et parties proportionnelles

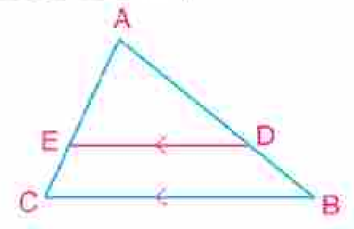
1 **Dans la figure ci-contre,** $\overline{DE} \mathbin{//} \overline{BC}$. Complète :



A Si $\frac{AD}{DB} = \frac{5}{3}$, alors : $\frac{AB}{BD} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ et $\frac{CE}{ED} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

B Si $\frac{AE}{AC} = \frac{4}{7}$, alors : $\frac{CE}{EA} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ et $\frac{BD}{AB} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

2 **Dans la figure ci-contre,** $\overline{DE} \mathbin{//} \overline{BC}$. Détermine les expressions correctes dans ce qui suit :



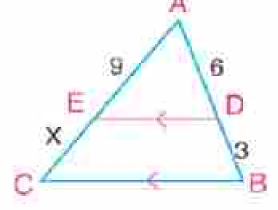
A $\frac{AB}{DB} = \frac{AE}{EC}$ **B** $\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{EC}$

C $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{AE}$ **D** $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$

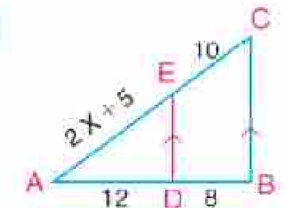
E $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE}$ **F** $\frac{CE}{BD} = \frac{AC}{AB}$

3 **Dans chacune des figures suivantes,** $\overline{DE} \mathbin{//} \overline{BC}$. Trouve la valeur numérique de x dans chaque cas (les longueurs sont en centimètres).

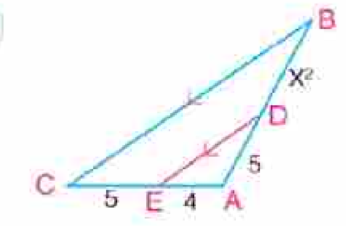
A



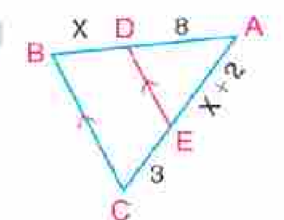
B



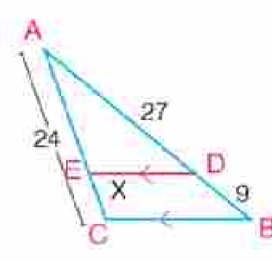
C



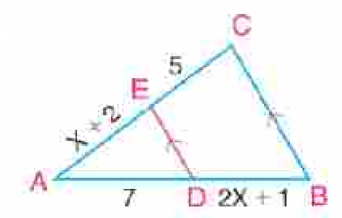
D



E



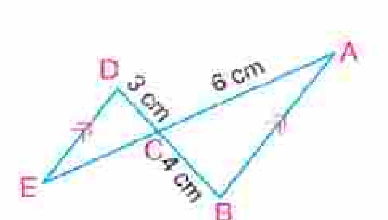
F



4 **Dans la figure ci-contre, :** $\overline{AB} \mathbin{//} \overline{DE}$ et $\overline{AE} \cap \overline{BD} = \{C\}$

AC = 6cm, BC = 4cm et CD = 3cm.

Trouve la longueur de $\overline{CE}$



5 $\overline{XY} \cap \overline{ZL} = \{M\}$ et $\overline{XZ} \parallel \overline{LY}$. Si XM = 9cm, YM = 15cm et ZL = 36 cm, trouve la longueur de $\overline{ZM}$.

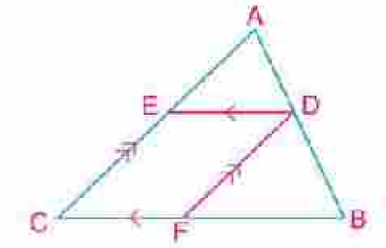
6 Utilise la figure ci-contre pour trouver la valeur de x dans chacun des cas suivants :

A AD = 4 , BD = 8 , CE = 6 et AE = x.

B AE = x , EC = 5 , AD = x - 2 et BD = 3.

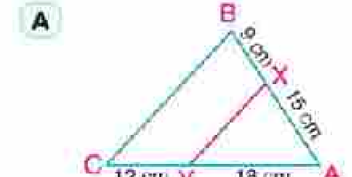
C AB = 21 , BF = 8 , FC = 6 et AD = x.

D AD = x , BF = x + 5 et 2DB = 3FC = 12.

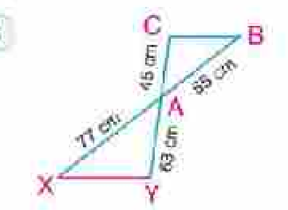


7 Dans chacune des figures suivantes, a-t-on $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$?

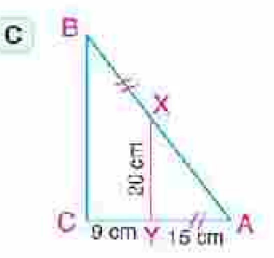
A



B



C



8 Soit XYZ un triangle tel que XY= 14cm, XZ = 21cm et L ∈ $\overline{XY}$ tel que XL = 5,6cm et M ∈ $\overline{XZ}$ tel que XM = 8,4cm. Démontre que $\overline{LM} \parallel \overline{YZ}$

9 Soit ABC un triangle. D ∈ $\overline{AB}$ et E ∈ $\overline{AC}$ tels que 5AE = 4 EC.
Si AD = 10 cm et DB = 8cm, a-t-on $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$? Explique ta réponse.

10 Soit ABCD un quadrilatère dont les diagonales se coupent en E. Si AE = 6cm, BE = 13cm, EC = 10cm et ED = 7,8 cm, démontre que le quadrilatère ABCD est un trapèze.

11 Démontre que le segment joignant les milieux de deux côtés dans un triangle est parallèle au troisième côté et sa longueur est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

12 Soit ABC un triangle. D ∈ $\overline{AB}$ tel que 3 AD = 2 DB et E ∈ $\overline{AC}$ tel que 5 CE = 3 AC. On trace $\overline{AX}$ qui coupe $\overline{BC}$ en X. Si AF = 8cm et AX = 20cm où F ∈ $\overline{AX}$, démontre que les points D, F et E sont alignés.

13 Soit ABC un triangle. D ∈ $\overline{BC}$, tel que $\frac{BD}{DC} = \frac{3}{4}$. E ∈ $\overline{AD}$, tel que $\frac{AE}{AD} = \frac{3}{7}$. On trace $\overrightarrow{CE}$ qui coupe $\overline{AB}$ en X. On trace $\overrightarrow{DY} \parallel \overline{CX}$ qui coupe $\overline{AB}$ en Y. Démontre que AX = BY.

14 Soit ABCD un rectangle dont les diagonales se coupent en M. E est le milieu de $\overline{AM}$ et F est le milieu de $\overline{MC}$. On trace $\overrightarrow{DE}$ qui coupe $\overline{AB}$ en X et on trace $\overrightarrow{DF}$ qui coupe $\overline{BC}$ en Y. Démontre que : $\overline{XY} \parallel \overline{AC}$.



15 A l'aide de la figure ci-contre, complète l'équivalent de chaque rapport :

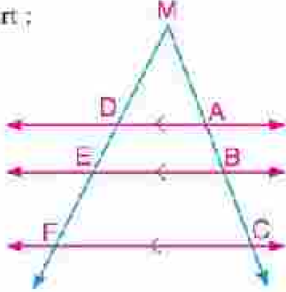


A $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{\cdots}$ **B** $\frac{AC}{BC} = \frac{\cdots}{EF}$

C $\frac{MA}{AB} = \frac{MD}{\cdots}$ **D** $\frac{AC}{AB} = \frac{\cdots}{DE}$

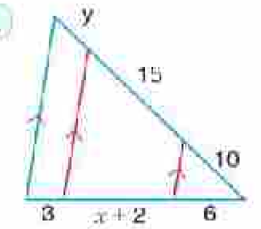
E $\frac{MB}{AB} = \frac{\cdots}{DE}$ **F** $\frac{MC}{AC} = \frac{MF}{\cdots}$

G $\frac{BC}{MB} = \frac{EF}{\cdots}$ **H** $\frac{DF}{MF} = \frac{AC}{\cdots}$

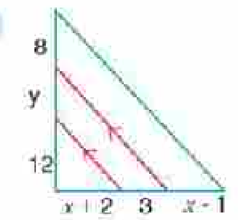


16 Dans chacune des figures suivantes, calcule la valeur numérique de x et y (les longueurs sont mesurées en centimètres)

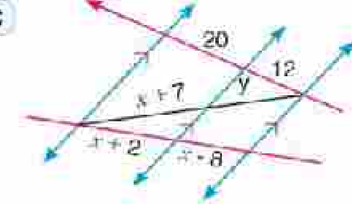
A



B



C



17 **Dans la figure ci-contre,**

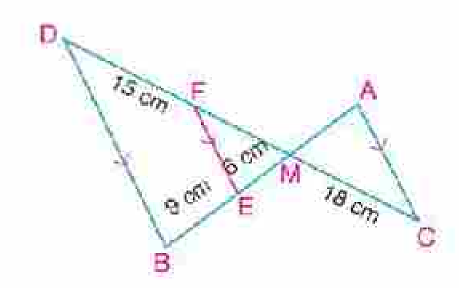
$\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{M\}$, $E \in \overline{MB}$,

$F \in \overline{MD}$ et $\overline{AC} \parallel \overline{FE} \parallel \overline{DB}$. Calcule :



A la longueur de $\overline{MF}$.

B la longueur de $\overline{AM}$.

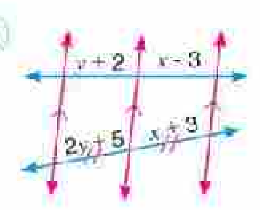


18 $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{E\}$, $x \in \overline{AB}$, $y \in \overline{CD}$, $\overline{XY} \parallel \overline{BD} \parallel \overline{AC}$

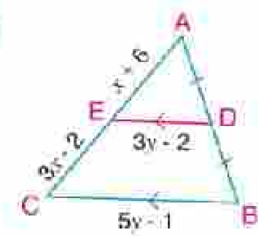
Démontre que : $AX \times ED = CY \times EB$.

19 Dans chacune des figures suivantes, calcule la valeur numérique de x et y :

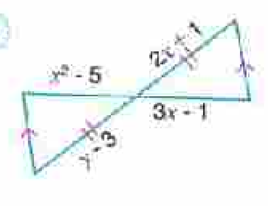
A



B



C



20 Soit ABCD un quadrilatère tel que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Ses diagonales se coupent en M. E est le milieu de $\overline{BC}$. On trace $\overrightarrow{EF} \parallel \overline{BA}$ qui coupe $\overline{BD}$ en X, $\overline{AC}$ en Y et $\overline{AD}$ en F.

Démontre que :

A $EY = \frac{1}{2} AB$. **B** $\frac{AY}{CM} = \frac{BX}{DM}$

Bissectrice de l'angle et parties proportionnelles 3 - 2

1 **Dans la figure ci-contre,** $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de $\angle$ A. Complète :



A $\frac{BD}{DC}$ = ...

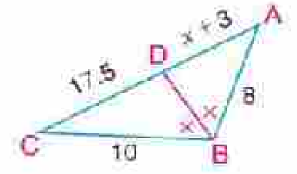
B $\frac{AC}{AB}$ = ...

C $\frac{BD}{BA}$ = ...

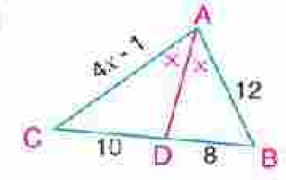
D AB × CD = ...

2 **Dans chacune des figures suivantes,** calcule la valeur numérique de x (les longueurs sont mesurées en centimètres)

A

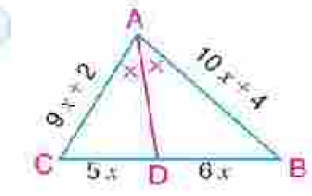


B

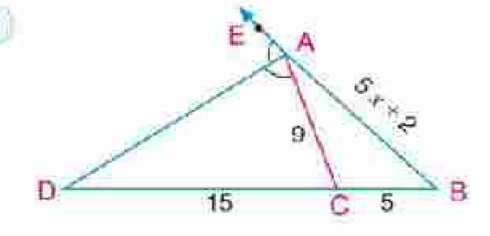


....

C



D



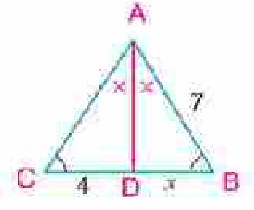
....

3 Soit ABC un triangle de périmètre 27cm. On trace $\overrightarrow{BD}$ bissectrice de $\angle$ B qui coupe $\overline{AC}$ en D. Si AD = 4cm et CD = 5cm, trouve la longueur de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ et $\overline{AD}$

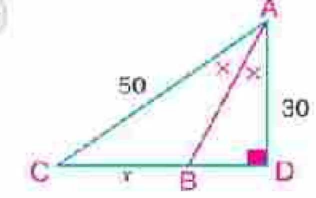
....

4 **Dans chacune des figures suivantes,** calcule la valeur numérique de x , puis calcule le périmètre du triangle ABC.

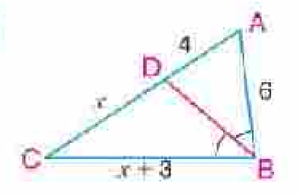
A



B



C

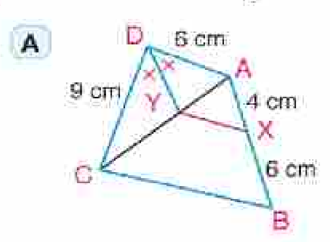


5 Soit ABC un triangle tel que AB = 8cm, AC = 4cm et BC = 6cm. On trace $\overrightarrow{AD}$ bissectrice de $\angle$A qui coupe $\overline{BC}$ en D. On trace $\overrightarrow{AE}$ bissectrice de $\angle$A extérieur au triangle ABC qui coupe $\overleftrightarrow{BC}$ en E. Trouve la longueur de $\overline{DE}$, $\overline{AD}$ et $\overline{AE}$.

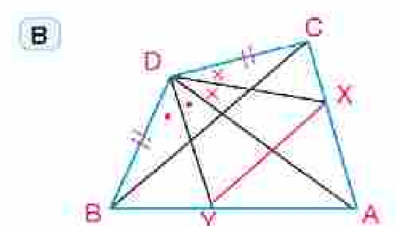


6 Dans chacune des figures suivantes, démontre que $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$

A



B

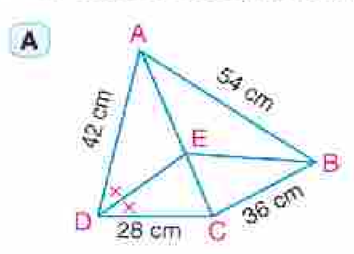


....

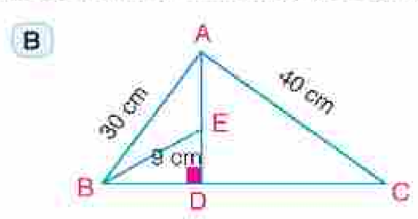
....

7 Dans chacune des figures suivantes, démontre que $\overrightarrow{BE}$ est une bissectrice de $\angle ABC$.

A



B



....

....

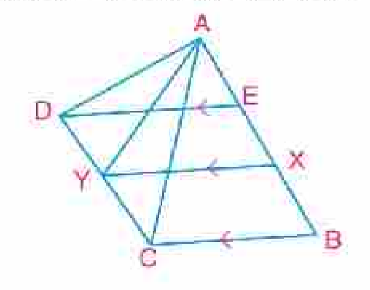
8 **Dans la figure ci-contre,** $\overline{ED} \parallel \overline{XY} \parallel \overline{BC}$ et

$AD \times BX = AC \times EX$.

Démontre que $\overrightarrow{AY}$ est une bissectrice de $\angle CAD$.

....

....



9 Soit ABC un triangle, $D \in \overrightarrow{BC}$ et $D \notin \overline{BC}$ tel que $CD = AB$. On trace $\overrightarrow{CE} \parallel \overline{DA}$ qui coupe $\overline{AB}$ en E. On trace $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{BC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en F. Démontre que $\overrightarrow{BF}$ est une bissectrice de $\angle ABC$.

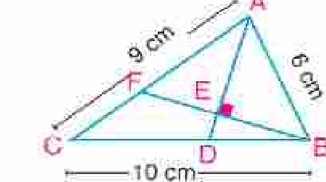
....

10 **Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle tel que $AB = 6$cm, $AC = 9$cm et $BC = 10$cm. $D \in \overline{BC}$ tel que $BD = 4$cm.

$\overrightarrow{BE} \perp \overline{AD}$ qui coupe $\overline{AD}$ et $\overline{AC}$ en E et F respectivement.

A Démontre que $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de $\angle A$.

B Calcule $A(\triangle ABF) : A(\triangle CBF)$



....

Applications de la proportionnalité dans un cercle

3 - 3

1 Détermine la position de chacun des points suivants par rapport au cercle M ayant pour longueur de rayon 10 cm, puis calcule la distance du point au centre du cercle :

A $P_M(A) = -36$ **B** $P_M(B) = 96$ **C** $P_M(C) =$ zéro

....

....

2 Détermine la puissance du point donné par rapport au cercle M ayant pour longueur de rayon R :

A Le point A où AM = 12cm et R = 9cm ....

B Le point B où BM = 8 cm et R = 15 cm ....

C Le point C où CM = 7 cm et R = 7 cm ....

D Le point D où DM = $\sqrt{17}$ cm et R = 4 cm ....

3 Si la distance d'un point au centre d'un cercle est égale à 25 cm et la puissance de ce point par rapport au cercle est égale à 400, calcule la longueur du rayon de ce cercle. ....

....

4 La longueur du rayon d'un cercle de centre M est égale à 20cm, A est un point distant de son centre de 16 cm. On trace une corde $\overline{BC}$ tel que A ∈ $\overline{BC}$, AB = 2 AC. Calcule la longueur de la corde $\overline{BC}$.

....

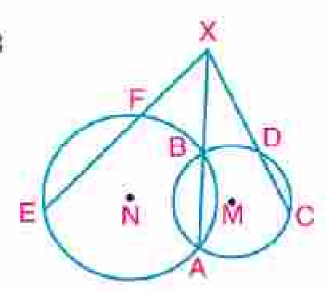
....

5 **Dans la figure ci-contre,** les deux cercles M et N se coupent en A et B $\overleftrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} \cap \overrightarrow{EF} = \{X\}$, XD = 2 D C , EF = 10cm et $P_N(X) = 144$.

A Démontre que $\overleftrightarrow{AB}$ est l'axe radical aux deux cercles M et N.

B Trouve la longueur de $\overline{XC}$ et $\overline{XF}$

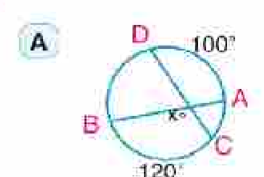
C Démontre que le quadrilatère CDFE est inscriptible.

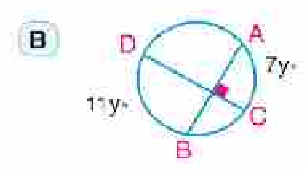


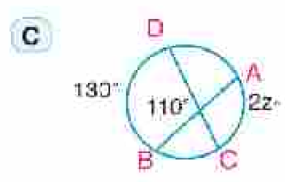
....

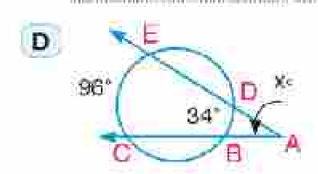
....

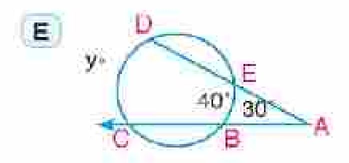
6 A l'aide des données de chaque figure, trouve la valeur du symbole x utilisé pour mesurer :

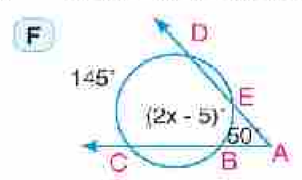
A


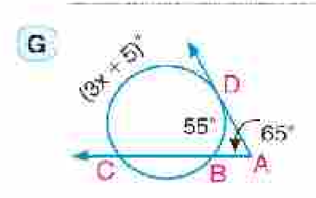
B


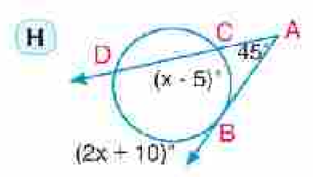
C


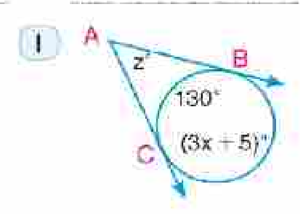
D


E


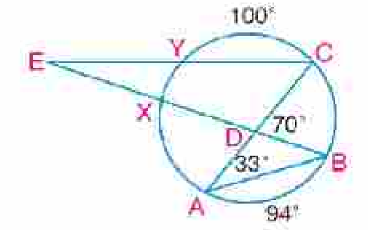
F


G


H


I


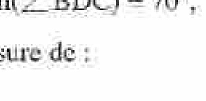
7 **Dans la figure ci-contre,** m(∠BAC) = 33°, m(∠BDC) = 70°, m($\overset{\frown}{AB}$) = 94°, m($\overset{\frown}{CY}$) = 100° Trouve la mesure de :



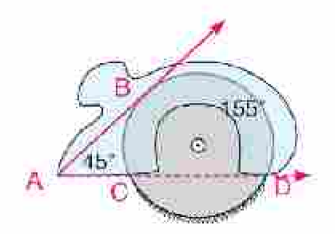
A $\overset{\frown}{XY}$

B $\overset{\frown}{AX}$

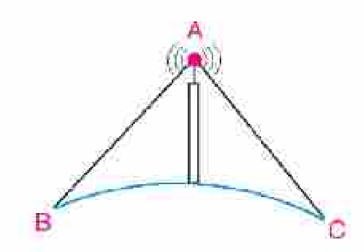
C ∠ BEC



8 Lien avec l'industrie : Une scie circulaire pour le bois a pour longueur de rayon 10 cm tourne à l'intérieure d'une caisse de protection. Si m(∠BAD) = 45°, m($\overset{\frown}{BD}$) = 155° trouve la longueur de la partie de l'arc du disque de la scie qui se trouve à l'extérieur de la caisse de protection.



9 Communications : Les signaux émis d'une tour de communication suivent des demi-droites d'origine le sommet de la tour qui sont tangents à la surface de la terre comme le montre la figure ci-contre. Détermine la mesure de l'arc compris entre les deux tangentes sachant que la tour est située au niveau de la mer et m(∠CAB) = 80°



Exercices généraux

1. Complète les phrases suivantes :

   A La bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure d'un même angle sont ....

   B Les bissectrices des angles d'un triangle sont ....

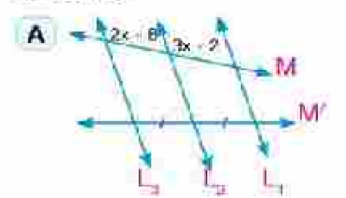
   C Si une droite est parallèle à un côté d'un triangle, elle découpe les deux autres côtés ....

   D La bissectrice extérieure de l'angle au sommet d'un triangle isocèle .... la base du triangle.

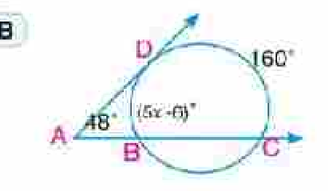
   E Si la puissance d'un point A par rapport à un cercle de centre M est négative, alors le point A est situé ....

2. A l'aide des données de chacune des figures suivantes, trouve la valeur du symbole utilisé pour la mesure :

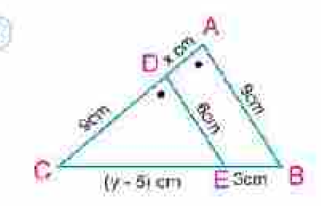
A



B



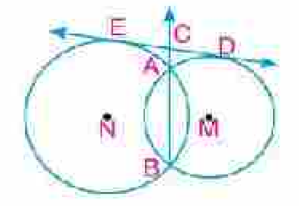
C



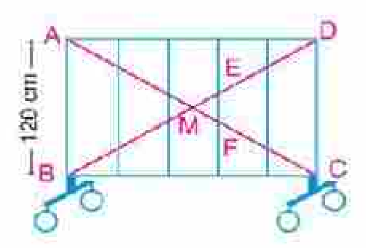
3. Dans la figure ci-contre, M et N sont deux cercles sécants en A et B. $\overleftrightarrow{ED}$ est une tangente commune aux deux cercles en D et E respectivement et $\overrightarrow{BA} \cap \overleftrightarrow{DE} = \{C\}$.

   A Démontre que $\overleftrightarrow{BC}$ est un axe radical aux deux cercles.

   B Si AB = 9cm et $P_N(C) = 36$, trouve la longueur de $\overline{CA}$ et $\overline{CD}$



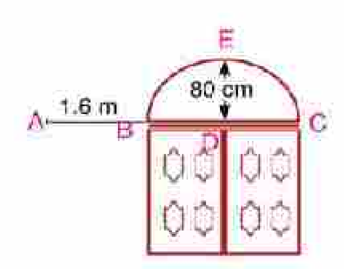
4. **La figure ci-contre** montre une barrière de circulation ABCD sous forme d'un rectangle. Elle est formée de barres parallèles équidistantes. Les deux barres $\overline{AC}$ et $\overline{BD}$ qui y sont fixées et qui se coupent en M, coupent l'une des barres parallèles en E et F respectivement. Si AB = 120 cm, trouve la longueur de $\overline{EF}$.



5. **Architecture :** A est un point situé à une distance de 1,6 mètre de la base de l'arcade, située au dessus du portail d'une maison. La puissance du point A par rapport au cercle de l'arcade est égale à 6,4 mètres carrés.

   A Trouve la longueur de la base de l'arcade ($\overline{BC}$).

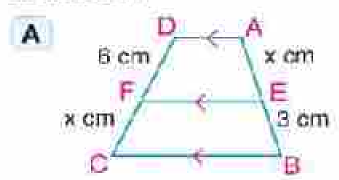
   B Si la hauteur de l'arcade est égale à 80 cm, calcule la puissance du point D par rapport au cercle de l'arcade et la longueur de son rayon .



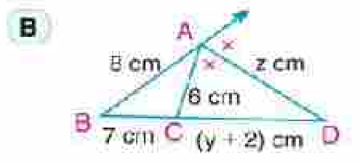
Epreuve de l'unité

1 A l'aide des données de chacune des figures suivantes, trouve la valeur du symbole utilisé pour la mesure :

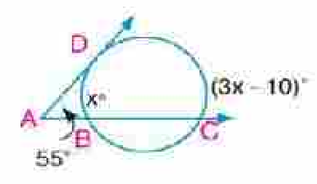
A



B

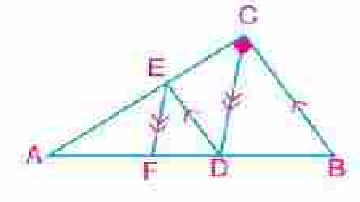


C



2 **Dans la figure ci-contre, :** ∠ ACB est droit, $\overline{BC}$ // $\overline{DE}$ et $\overline{CD}$ // $\overline{EF}$. Démontre que :

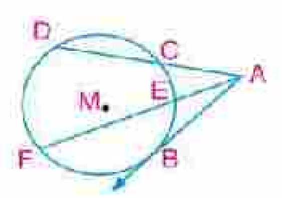
$AF \times AB = (AE)^2 + (ED)^2$



3 Soit ABC un triangle et N un point à l'intérieur du triangle. On trace les bissectrices des angles ANB, BNC et CNA qui coupent $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ et $\overline{CA}$ en D, E et F respectivement.

Démontre que : $\frac{AD}{DB} \times \frac{BE}{EC} \times \frac{CF}{FA} = 1$

4 Dans la figure ci-contre, A est un point à l'extérieur du cercle et $\overrightarrow{AB}$ est une tangente au cercle en B. On trace $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ qui coupent le cercle en C, D, E, et F respectivement. AC = 4cm et EF = 9 cm.



A Si $P_M(A) = 36$ trouve la longueur de $\overline{AB}$, $\overline{AE}$ et $\overline{CD}$

B Si $X \in \overline{CD}$ tel que CX = 2cm, trouve $P_M(X)$ et $P_M(D)$.

5 $\overline{AD}$ est une médiane dans un triangle ABC, $\overrightarrow{CX}$ est une bissectrice de ∠ ADB qui coupe $\overline{AB}$ en X et $\overrightarrow{DY}$ est une bissectrice de ∠ ADC qui coupe $\overline{AC}$ en Y.

A Démontre que $\overline{XY}$ // $\overline{BC}$.

B Si on trace $\overrightarrow{DZ} \perp \overline{XY}$ qui le coupe en Z et si XZ = 9cm et ZY = 16cm, trouve la longueur de : $\overline{DX}$ et $\overline{DY}$.

Épreuve cumulative

Questions à choix multiples :

1 Si $\frac{x}{6} = \frac{9}{2}$, alors x est égal à :

A 12 B 16 C 27 D 81

2 Les racines de l'équation $x^2 + x - 20 = 0$ sont :

A 2, −10 B 4, −5 C 5, −4 D −4, 5

3 Dans la figure ci-contre, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, alors AC est égale à :

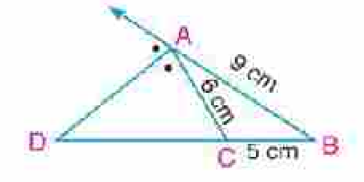
A 3cm B 4cm
C 6cm D 10cm

4 **Dans la figure ci-contre,** L_1, L_2 et L_3 sont des droites parallèles coupées par les deux sécantes M et M'. Si les longueurs sont mesurées en centimètres, alors x est égale à :

A 5 B 3
C 7 D 2

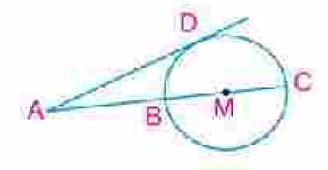
5 **Dans la figure ci-contre,** si $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de l'angle en A extérieure au triangle , alors la longueur de $\overline{CD}$ est égale à :





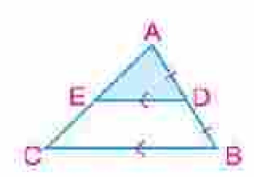
A 5cm B 10cm
C 12cm D 18cm

6 **Dans la figure ci-contre,** le cercle M a pour longueur de rayon 5 cm et $\overrightarrow{AD}$ est une tangente au cercle en D.
Si AD = 12 cm, alors la longueur de $\overline{AC}$ est égale à :



A 7cm B 12cm
C 15cm D 18cm

7 **Dans la figure ci-contre,** Si l'aire du triangle ADE = 16cm² ,
alors l'aire du triangle ABC est égale à .... cm².



A 16 B 32
C 64 D 128

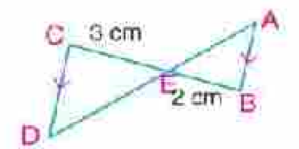
Épreuve cumulative

Questions à réponses courtes :

8 **Dans la figure ci-contre,**

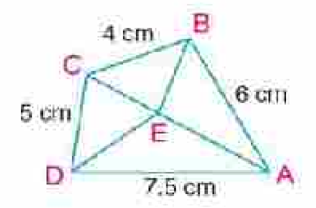
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, BE = 2cm, CE = 3cm et AD = 10cm.

Calcule la longueur de $\overline{ED}$.



9 **Dans la figure ci-contre,** $\overrightarrow{BE}$ est une bissectrice de $\angle$ B qui coupe $\overline{AC}$ en E. AB = 6cm, CD = 5cm, DA = 7,5cm et BC = 4cm .

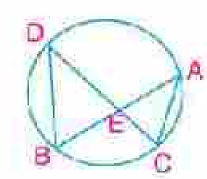
Démontre que $\overrightarrow{DE}$ est une bissectrice de $\angle$ ADC.



10 **Dans la figure ci-contre,**

$\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont deux cordes dans le cercle et $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\}$.

Démontre que $\triangle$ AEC ~ $\triangle$ DEB

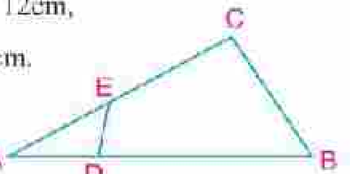


Questions à réponses longues :

11 **Dans la figure ci-contre,** ABC est un triangle tel que AB = 2 BC = 12cm, AC = 9cm et D ∈ $\overline{AB}$ tel que AD = 3cm et E ∈ $\overline{AC}$ tel que AE = 4cm.

Démontre que $\triangle$ ABC ~ $\triangle$ AED,

puis trouve la longueur de $\overline{ED}$.



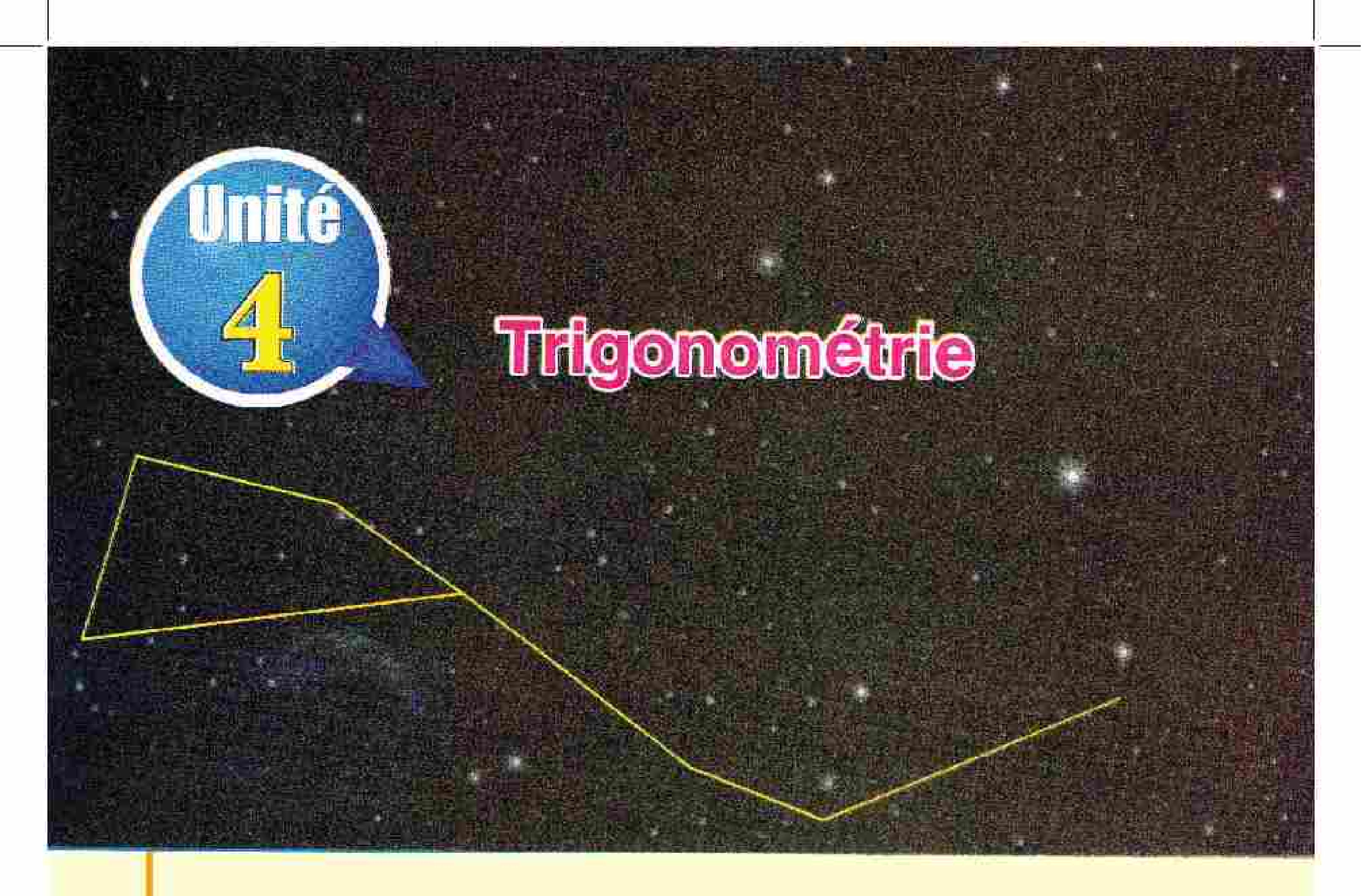
12 Soit ABC un triangle, D ∈ $\overrightarrow{BC}$ et D ∉ $\overline{BC}$. On trace $\overrightarrow{DF}$ qui coupe $\overline{AC}$ et $\overline{AB}$ en E et F respectivement.

Si le quadrilatère BCEF est inscriptible, démontre que $\frac{BD}{DE} = \frac{FB}{CE}$.

As-tu besoin d'aide ?

En cas de difficulté à répondre à l'une des questions, utilise le tableau suivant :

N° de la question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N° de la leçon	Compétences	1 - 1	2 - 3	3 - 1	3 - 2	2 - 5	2 - 4	3 - 1	3 - 2	2 - 3	2 - 3	3 - 3



Leçons de l'unité

4 - 1 Angle orienté

1 Complète :

A Un angle orienté est en position standard si ……………………

B Deux angles orientés en position standard sont dits équivalents si ……………

C Un angle orienté a une mesure positive si …………… et a une mesure négative si ……………

D Si le côté final d'un angle orienté est situé sur l'un des deux axes du repère, alors l'angle est appelé ……………

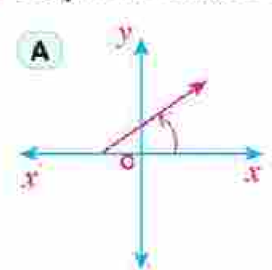
E Si (θ) est la mesure d'un angle orienté en position standard et $n \in \mathbb{Z}$, alors les angles de mesures ($\theta + n \times 360°$) sont appelés …………… .

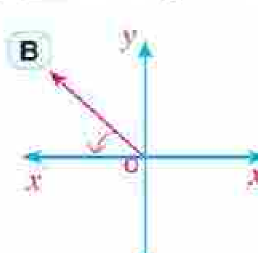
F La plus petite mesure positive d'un angle de mesure 530° est ……………

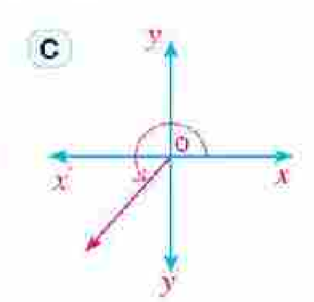
G L'angle ayant pour mesure 930° est situé dans le …………… quadrant.

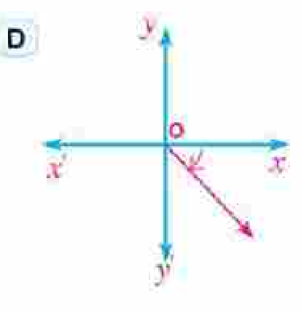
H La plus petite mesure positive d'un angle de mesure −690° est ……………

2 Lequel des angles suivants est en position standard ? ……………………

A


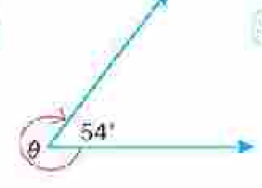
B


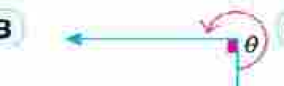
C


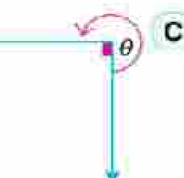
D


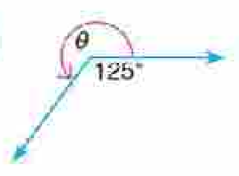
3 Trouve la mesure de l'angle orienté θ indiqué dans chacune des figures suivantes :

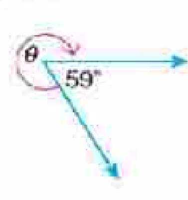




B




C


D


…………… …………… …………… ……………

4 Détermine le quadrant dans lequel se trouve chacun des angles ayant pour mesures :

A 24° **B** 215° **C** −40° **D** −220° **E** 640°

…………… …………… …………… …………… ……………

5 Dessine en position standard chacun des angles suivants :

A $32°$ **B** $140°$ **C** $-80°$ **D** $-110°$ **E** $-315°$

6 **Détermine une mesure négative de chacun des angles suivants :**

A $83°$ .... **B** $136°$ .... **C** $90°$ ....

D $264°$ .... **E** $964°$ .... **F** $1070°$ ....

7 **Détermine la plus petite mesure positive de chacun des angles suivants :**

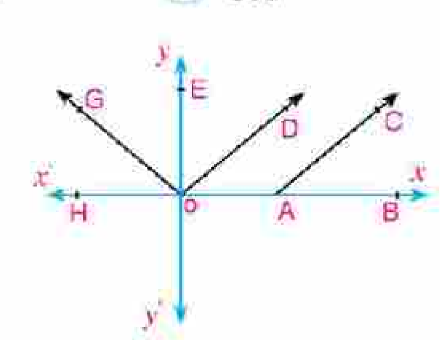
A $-183°$ **B** $-217°$ **C** $-315°$ **D** $-570°$

8 **Dans la figure suivante,** lequel des couples suivants représente un angle orienté en position standard ? Pourquoi ?

A $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$ **B** $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OC})$

C $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ **D** $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OD})$

E $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OG})$ **F** $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OG})$



....

....

....

9 **Un gymnaste tourne d'un angle de mesure 200°. Trace cet angle dans la position standard**

10 **Déceler l'erreur :** Détermine le plus petit angle de mesure positive et un autre angle de mesure négative ayant le même côté final que l'angle $(-135°)$

Réponse de Karim

Le plus petit angle de mesure positive =

$-135° + 180° = 45°$

Le plus petit angle de mesure négative =

$-135° - 180° = -315°$

Réponse de Ziad

Le plus petit angle de mesure positive =

$-135° + 360° = 225°$

Un autre angle de mesure négative =

$-135° - 360° = -495°$

Laquelle des deux réponses est correcte ? Explique ta réponse.

....

....

....

4 - 2

Mesure en radians et mesure en degrés

1) Questions à choix multiples :

1) L'angle en position simple qui a pour mesure 60° est équivalent à l'angle qui a pour mesure ......

A) 120° B) 240° C) 300° D) 420°

2) L'angle qui a pour mesure $\frac{31\pi}{6}$ se trouve dans le .... quadrant

A) premier B) deuxième C) troisième D) quatrième

3) L'angle qui a pour mesure $\frac{-9\pi}{4}$ se trouve dans le .... quadrant

A) premier B) deuxième C) troisième D) quatrième

4) Sachant que la somme des mesures des angles d'un polygone est 180° (n – 2) où n est le nombre de côtés, la mesure en radians d'un angle d'un pentagone régulier est ....

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{7\pi}{2}$ C) $\frac{3\pi}{5}$ D) $\frac{2\pi}{3}$

5) L'angle ayant pour meure en radians $\frac{7\pi}{3}$ a pour mesure en degrés ....

A) 105° B) 210° C) 420° D) 840°

6) Si la mesure d'un angle en degrés est 64° 48' , alors sa mesure en radians est ....

A) $0{,}18^{rad}$ B) $0{,}36^{rad}$ C) $0{,}18\ \pi$ D) $0{,}36\ \pi$

7) Dans un cercle de longueur de rayon 24 cm, la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de mesure 30° est égale à ....

A) 2π cm B) 3π cm C) 4π cm D) 5π cm

8) Dans un cercle de longueur de rayon 15 cm, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 5πcm est égale à ....

A) 30° B) 60° C) 90° D) 180°

9) Si la mesure d'un angle dans un triangle est 75° et la mesure d'un autre angle du triangle est $\frac{\pi}{4}$, alors la mesure en radians du troisième angle est ....

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{5\pi}{12}$

2) Réponds aux questions suivantes :

(10) Trouve en fonction de π, la mesure en radians de chacun des angles suivants :

A $225°$ .... B $240°$ ....

C $-135°$ .... D $300°$ ....

E $390°$ .... F $780°$ ....

(11) Trouve, à un millième près, la mesure en radians de chacun des angles suivants :

A $56.6°$ B $25°\ 18'$ C $160°\ 50'\ 48''$

....

(12) Trouve, à une seconde près, la mesure en degrés de chacun des angles suivants :

A 0.49^{rad} B 2.27^{rad} C $-3\frac{1}{2}^{rad}$

....

(13) Soit un cercle de longueur de rayon R. θ est la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur L.

A Si $R = 20$ cm et $\theta = 78°\ 15'\ 20''$, alors $L =$ .... (à un dixième près)

B Si $L = 27{,}3$ cm et $\theta = 78°\ 0'\ 24''$, alors $R =$ .... (à un dixième près)

(14) Dans un cercle, un angle au centre de mesure $150°$ intercepte un arc de longueur 11 cm. Calcule la longueur du rayon du cercle (à un dixième près).

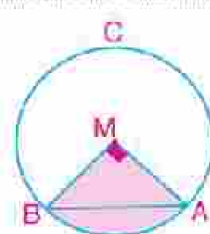
....

(15) Trouve la mesure en radians et la mesure en degrés d'un angle au centre qui intercepte un arc de longueur 8,7 cm dans un cercle de rayon de longueur 4 cm. ....

(16) **Lien avec la géométrie :** Dans un triangle, la mesure de l'un des angles est $60°$ et la mesure d'un autre angle . Trouve en radians et en degrés la mesure du troisième angle du triangle. ....

(17) **Lien avec la géométrie :** Soit un cercle de longueur de rayon 4 cm. On trace l'angle inscrit $\angle ABC$ de mesure $30°$. Trouve la longueur du petit arc $\overset{\frown}{AC}$ ....

(18) **Lien avec la géométrie :** Dans la figure ci-contre, si l'aire du triangle MAB rectangle en M est $32\ cm^2$, trouve le périmètre de la figure colorée à un centième de centimètre près ....



19 **Lien avec la géométrie :** $\overline{AB}$ est un diamètre d'un cercle de longueur 24 cm. On trace la corde $\overline{AC}$ tel que m ($\angle$BAC)= 50°. Trouve, à un centième près, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AC}$

....

20 **Distances :** Quelle distance parcourt un point situé sur l'extrémité de l'aiguille des minutes d'une montre pendant 10 minutes si la longueur de l'aiguille est 6 cm ?

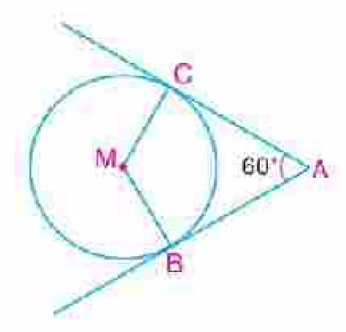
....

21 **Astronomie :** Un satellite qui tourne autour de la terre dans une orbite circulaire fait un tour complet en 6 heures. Si la longueur du rayon de l'orbite à partir du centre de la terre est 9000 km, calcule, en kilomètres par heure, la vitesse du satellite...

22 **Lien avec la géométrie :** **Dans La figure ci-contre,**

$\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux segments tangents au cercle M, m($\angle$CAB) = 60° et AB = 12 cm . Trouve à une unité près la longueur de $\overset{\frown}{BC}$.

....



23 **Lien avec le temps :** Pendant le jour, le cadran solaire est utilisé pour indiquer le temps par le déplacement de l'ombre d'un objet, sur une surface graduée, pour indiquer l'heure et ses fractions. Si l'ombre tourne autour du cadran au taux de 15° par heure



A trouve, en radians, la mesure de l'angle fait par l'ombre après l'écoulement de 4 heures...

B Après combien d'heures l'ombre tourne d'un angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$ radians?

....

C La longueur du rayon d'un cadran solaire est 24 cm. Trouve en fonction de π, la longueur de l'arc fait par la rotation de l'ombre sur le bord du disque après l'écoulement de 10 heures ....

24 **Réflexion critique :** Dans la position standard, une droite fait un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ avec le sens positif de l'axe des abscisses. Trouve l'équation de cette droite

....

....

Fonctions trigonométriques

4 - 3

1) Questions à choix multiples :

1 Soit un angle de mesure θ en position standard. Si son côté final coupe le cercle trigonométrique au point $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, alors $\sin \theta$ est égal à ....

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **C** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D** $\frac{2}{\sqrt{3}}$

2 Si $\sin \theta = \frac{1}{2}$ où θ est un angle aigu, alors θ est égal à ....

A 30° **B** 45° **C** 60° **D** 90°

3 Si $\sin \theta = -1$ et $\cos \theta = 0$, alors θ est égal à ....

A $\frac{\pi}{2}$ **B** π **C** $\frac{3\pi}{2}$ **D** 2π

4 Si $\operatorname{cosec} \theta = 2$ où θ est un angle aigu, alors θ est égal à ....

A 15° **B** 30° **C** 45° **D** 60°

5 Si $\cos \theta = \frac{1}{2}$ et $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors θ est égal à ....

A $\frac{2\pi}{3}$ **B** $\frac{5\pi}{6}$ **C** $\frac{5\pi}{3}$ **D** $\frac{11\pi}{6}$

6 Si $\operatorname{tg} \theta = 1$ où θ est un angle aigu, alors θ est égal à ....

A 10° **B** 30° **C** 45° **D** 60°

7 $\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{cotg} 45^\circ - \sec 60^\circ$ est égale à ....

A Zero **B** $\frac{1}{2}$ **C** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D** 1

8 Si $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ où θ est un angle aigu, alors $\sin \theta$ est égal à ....

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **C** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **D** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Réponds aux questions suivantes :

9 Soit un angle de mesure θ en position standard. Trouve toutes les fonctions trigonométriques de l'angle θ sachant que son côté final coupe le cercle trigonométrique au point :

A $(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3})$ **B** $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ **C** $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ **D** $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$

....

10 Soit un angle de mesure θ en position standard. Trouve toutes les fonctions trigonométriques de l'angle θ sachant que son côté final coupe le cercle d'unité au point donné dans chacun des cas suivants :

A $(3a, -4a)$ où $a > 0$ ....

B $(\frac{3}{2}a, -2a)$ où $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ....

11 Ecris le signe de chacun des fonctions suivantes :

A sin 240° ....

B tg 365° ....

C cosec 410° ....

D cotg $\frac{9\pi}{4}$ ....

E sec - $\frac{9\pi}{4}$ ....

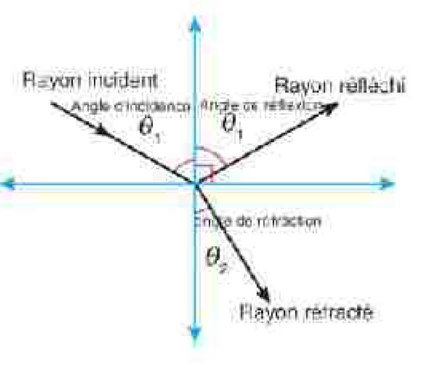
F tg $\frac{-20\pi}{9}$ ....

12 **Trouve la valeur de ce qui suit :**

A $\cos\frac{\pi}{2} \times \cos 0 + \sin\frac{3\pi}{2} \times \sin\frac{\pi}{2}$ ....

B $tg^2 30° + 2\sin^2 45° - \cos^2 90°$ ....

13 **Lien avec la physique :** Lorsque les rayons lumineux tombent sur une surface semi-transparente, ils se reflètent tels que l'angle d'incidence et l'angle de réflexion aient la même mesure mais certains rayons se réfractent en passant à travers la surface comme le montre la figure ci-contre.



Si $\sin\theta_1 = K \sin\theta_2$ où $K = \sqrt{3}$, $\theta_1 = 60°$, trouve la mesure de l'angle θ_2. ....

14 **Déceler l'erreur :** L'enseignant a demandé aux élèves de sa classe de calculer 2 sin 45°.

Réponse de Karim

$2\sin 45° = \sin 2 \times 45°$
$= \sin 90° = 1$

Réponse d'Ahmed

$2\sin 45 = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
$= \sqrt{2}$

Laquelle des deux réponses est correcte ? Pourquoi ? ....

15 **Réflexion critique :** Si θ est la mesure d'un angle en position standard telle que $\cot g\theta = -1$ et $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{2}$. Est-il possible que $\theta = \frac{3\pi}{4}$? Explique ta réponse. ....

....

....

Angles associés

4 - 4

(1) Complète ce qui suit :

1. $\cos(180^\circ + \theta) =$ ....
2. $\text{tg}(180^\circ - \theta) =$ ....
3. $\text{cosec}(360^\circ - \theta) =$ ....
4. $\sin(360^\circ + \theta) =$ ....
5. $\sin(90^\circ + \theta) =$ ....
6. $\text{cotg}(90^\circ - \theta) =$ ....
7. $\sec(270^\circ + \theta) =$ ....
8. $\cos(270^\circ - \theta) =$ ....

(2) Complète ce qui suit par une mesure d'un angle aigu :

9. $\sin 25^\circ = \cos$ ....°
10. $\cos 67^\circ = \sin$ ....°
11. $\text{tg } 42^\circ = \text{cotg}$ ....°
12. $\text{cosec } 13^\circ = \sec$ ....°
13. Si $\text{cotg } 2\theta = \text{tg } \theta$ où $0^\circ < \theta < 90^\circ$, alors $\theta =$ ....
14. Si $\sin 5\theta = \cos 4\theta$ où θ est un angle aigu positif, alors $\theta =$ ....°
15. Si $\sec \theta = \sec(90^\circ - \theta)$, alors $\text{cotg } \theta =$ ....
16. Si $\text{tg } 2\theta = \text{cotg } 3\theta$ où $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, alors $\theta =$ .... rad
17. Si $\cos \theta = \sin 2\theta$ où θ est la mesure positive d'un angle aigu, alors $\sin 3\theta =$ ....

(3) Questions à choix multiples :

18. Si $\text{tg}(180^\circ + \theta) = 1$ où θ est la plus petite mesure d'un angle aigu positif, alors θ est égal à ....
    - A) 45°
    - B) 30°
    - C) 60°
    - D) 135°
19. Si $\cos 2\theta = \sin \theta$ où $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, alors $\cos 2\theta =$ ....
    - A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
    - B) $\frac{1}{2}$
    - C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
    - D) 1
20. Si $\sin \alpha = \cos \beta$ où α et β sont les mesures de deux angles aigus, alors $\text{tg}(\alpha + \beta)$ est égale à ....
    - A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
    - B) 1
    - C) $\sqrt{3}$
    - D) indéfinie
21. Si $\sin 2\theta = \cos 4\theta$ où θ est un angle aigu positif, alors $\text{tg}(90^\circ - 3\theta)$ est égale à ....
    - A) -1
    - B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
    - C) 1
    - D) $\sqrt{3}$

(22) Si $\cos(90^\circ + \theta) = \frac{1}{2}$ où θ est la **plus petite** mesure d'un angle **aigu** positif, alors θ est égale à ....

A 150° B 210° C 240° D 330°

(4) Réponds aux questions suivantes :

(23) Trouve les valeurs de θ où $0 \leqslant \theta < 90^\circ$ qui vérifient ce qui suit :

A $\sin(3\theta + 15^\circ) = \cos(2\theta - 5^\circ)$ ....

B $\sec(\theta + 25^\circ) = \text{cosec}(\theta - 15^\circ)$ ....

C $\text{tg}(\theta + 20^\circ) = \text{cotg}(3\theta + 30^\circ)$ ....

D $\cos\left(\frac{\theta + 20^\circ}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta + 40^\circ}{2}\right)$ ....

(24) **Trouve la valeur** de ce qui suit :

A $\sin 150^\circ$ B $\text{cosec } 225^\circ$ C $\sec 300^\circ$ D $\text{tg } 780^\circ$

....

E $\text{cosec } \frac{11\pi}{6}$ F $\sin \frac{7\pi}{4}$ H $\text{cotg } \frac{-2\pi}{3}$ I $\cos \frac{-7\pi}{4}$

....

(25) Soit un angle de mesure θ en position standard. Si son côté final coupe le cercle trigonométique au point $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, trouve la valeur de :

A $\sin(180^\circ + \theta)$ ....

B $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ ....

C $\text{tg}(360^\circ - \theta)$ ....

D $\text{cosec}(\frac{3\pi}{2} - \theta)$ ....

(26) Déceler l'erreur : Toutes les réponses suivantes sont correctes sauf une. Laquelle ?

1- $\cos\theta$ est égale à ....

A $\sin(\theta - 270^\circ)$ B $\sin(270^\circ - \theta)$ C $\cos(360^\circ - \theta)$ D $\cos(360^\circ + \theta)$

2- $\sin\theta$ est égale à ....

A $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ B $\sin(\pi - \theta)$ C $\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta)$ D $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta)$

3- $\text{tg } \theta$ est égale à ....

A $\text{cotg}(90^\circ - \theta)$ B $\text{cotg}(270^\circ - \theta)$ C $\text{tg}(270^\circ - \theta)$ D $\text{tg}(180^\circ + \theta)$

27 **Liens avec la technologie :** pendant que Karim utilise son ordinateur portable, la mesure de son angle d'inclinaison sur l'horizontale est 132° comme le montre la figure ci-contre.



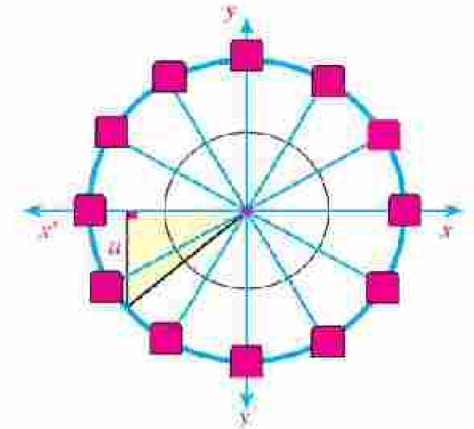
A Dessine la figure dans un repère orthogonal de sorte que l'angle de mesure 132° soit en position standard. Puis calcule son angle associé.

....

B Ecris une fonction trigonométrique qu'on peut utiliser pour trouver la valeur de a, puis trouve cette valeur à un centimètre près.

....

Jeux : La grande roue est très répondue dans les parcs d'attraction. C'est un ensemble de caisses tournantes dans un sens circulaire de longueur de rayon 12 mètres. Si la mesure d'un angle en position standard est $\frac{5\pi}{4}$.



A trace l'angle de mesure $\frac{5\pi}{4}$ en position standard.

....

B Ecris une fonction trigonométrique qu'on peut utiliser pour trouver la valeur de a, puis trouve, en mètres, cette valeur à un centième près.

....

28 **Réflexion critique :**

A Si θ est la mesure d'un angle en position standard telle que $\cot \theta = -1$ et $\operatorname{cosec} \theta = \sqrt{2}$, est-il possible que $\theta = \frac{3\pi}{4}$? Explique ta réponse.

....

B Si $\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \frac{1}{2}$, trouve la plus petite mesure positive de θ.

....

4 - 5 Représentation graphique des fonctions srigonométriques

(1) Complète ce qui suit :

① L'ensemble image de la fonction f telle que $f(\theta) = \sin \theta$ est ....

② L'ensemble image de la fonction f telle que $f(\theta) = 2 \sin \theta$ est ....

③ La valeur maximale de la fonction g telle que $g(\theta) = 4 \sin \theta$ est ....

④ La valeur minimale de la fonction h telle que $h(\theta) = 3 \cos \theta$ est ....

(2) Ecris l'expression algébrique de chacune des fonctions trigonométriques suivantes :

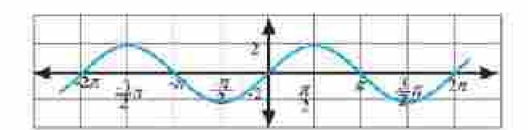


Figure (1) : L'expression algébrique est

....

Figure (2) : L'expression algébrique est

....

(3) Réponds aux questions suivantes :

⑤ Détermine la valeur maximale, la valeur minimale et l'ensemble image de chacune des fonctions suivantes :

A $y = \sin \theta$

....

B $y = 3 \cos \theta$

....

C $y = \frac{3}{2} \sin \theta$

....

⑥ Représente chacune des deux fonctions $y = 4 \cos \theta$ et $y = 3 \cos \theta$ en utilisant une calculatrice scientifique graphique ou un logiciel convenable. Du graphique, trouve :

A l'ensemble image.

....

B la valeur maximale, la valeur minimale de la fonction.

....

Trouver la mesure d'un angle en connaissant l'un de ses rapports trigonométriques

4 - 6

(1) Questions à choix multiples :

1. Si $\sin \theta = 0{,}4325$ où θ est la mesure positive d'un angle aigu, alors $\theta =$ ....
   - A 25.626°
   - B 64.347°
   - C 32.388°
   - D 46.316°

2. Si $\text{tg } \theta = 1{,}8$ où $90° \leqslant \theta \leqslant 360°$, alors $\theta =$ ....
   - A 60.945°
   - B 119.055°
   - C 240.945°
   - D 299.055°

(2) Réponds aux questions suivantes :

1. Soit un angle de mesure θ en position standard. Si son côté final coupe le cercle trigonométrique au point B, calcule $\cos \theta$ et $\sin \theta$ dans chacun des cas suivants :
   - A $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
   - B $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
   - C $B\left(-\frac{6}{10}, \frac{8}{10}\right)$

   ....

   ....

2. Soit un angle de mesure θ en position standard. Si son côté final coupe le cercle trigonométrique au point B, calcule $\sec \theta$ et $\text{cosec } \theta$ dans chacun des cas suivants :
   - A $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
   - B $B\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$
   - C $B\left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

   ....

   ....

3. Soit un angle de mesure θ en position standard. Si son côté final coupe le cercle trigonométrique au point B, calcule $\text{tg } \theta$ et $\text{cotg } \theta$ dans chacun des cas suivants :
   - A $B\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$
   - B $B\left(\frac{3}{\sqrt{34}}, -\frac{5}{\sqrt{34}}\right)$
   - C $B\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

   ....

   ....

4. Soit un angle de mesure θ en position standard. Si son côté final coupe le cercle trigonométrique au point B, calcule θ où $0° < \theta < 360°$ dans chacun des cas suivants :
   - A $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
   - B $B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
   - C $B\left(\frac{6}{10}, \frac{-8}{10}\right)$

   ....



5 Trouve en radians la mesure du plus petit angle positif qui vérifie ce qui suit :

A $\sin\theta = 0,6$ .... **B** $\cos\theta = 0,436$ .... **C** $tg\theta = 1,4552$ ....

D $\sec\theta = (-2,2364)$ .... **E** $cotg\theta = 3,6218$ .... **F** $cosec\theta = (-1,6004)$ ....

6 Si $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$, trouve la mesure de l'angle θ dans chacun des cas suivants :

A $\sin\theta = (0,2356)$ .... **B** $\cos\theta = (-0,642)$ .... **C** $tg\theta = (-2,1456)$ ....

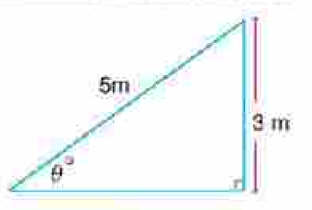
7 Si $\sin\theta = \frac{1}{3}$ et $90° \leqslant \theta \leqslant 180°$.

A calcule la mesure de l'angle θ à une seconde près. ....

B trouve la valeur de $\cos\theta$, $tg\,\theta$ et $\sec\theta$.

....

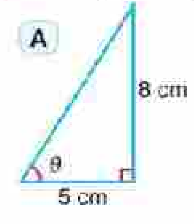
8 **Echelle :** Une échelle de 5 mètres de long repose sur un mur vertical. Si la hauteur du sommet de l'échelle par rapport à la surface de la terre est égale à 3 mètres, trouve en radians la mesure de l'angle d'inclinaison de l'échelle sur l'horizontale.



....

9 Trouve, en degrés, la mesure de l'angle θ dans chacun des cas suivants :

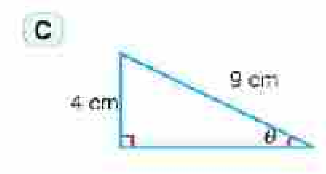
A



B

7 cm
θ
9 cm

C



Exercices généraux

Réponds aux questions suivantes en donnant une valeur approchée du résultat à un centième près :

1 Transforme les mesures suivantes de degrés en radians :

A 120° .... **B** 64.8° .... **C** $220^\circ\ 36'$ ....

2 Transforme les mesures suivantes de radians en degrés :

A $\frac{5\pi}{3}$ .... **B** $-\frac{3\pi}{2}$ .... **C** 1.12^{rad} ....

3 Dans un cercle de longueur de rayon R, un angle au centre de mesure θ intercepte un arc de longueur L.

A Si $R = 8$ cm et $\theta = 1{,}2^{rad}$, trouve L. ....

B Si $L = 26$ cm et $R = 18$ cm, trouve θ en degrés. ....

4 Sans utiliser de calculatrice, trouve la valeur de ce qui suit :

A tg 120° **B** $\sin(\frac{13\pi}{6})$ **C** $\cos 330^\circ$ **D** cotg (-300°) **E** cosec $(-\frac{\pi}{3})$

....

5 Soit un angle de mesure θ en position standard. Si son côté final coupe le cercle trigonométrique au point donné, calcule θ dans chacun des cas suivants :

A $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ **B** $(\frac{-5}{13}, \frac{-12}{13})$ **C** $(\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5})$ **D** $(\frac{-\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3})$

....

6 **A** Démontre que :

1°) $\sin 60^\circ = 2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ$ **2°)** $\cos 300^\circ = 2 \sin^2 60^\circ - 1$

B Si $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ où $90^\circ < \theta < 180^\circ$, trouve la valeur de :

1°) $\sin(180^\circ - \theta)$ **2°)** tg $(\theta - 180^\circ)$

....

7 Trouve la mesure de l'angle dans l'intervalle $0^\circ \leqslant \theta \leqslant 360^\circ$ dans chacun des cas suivants :

A $tg^{-1}\ 1$ **B** $\sin^{-1}(-\frac{1}{2})$ **C** $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$ **D** $tg^{-1}(-\sqrt{3})$

....

8 Soit une descente de longueur 65 mètres et de hauteur 8 mètres de la surface de la terre. Ecris une fonction trigonométrique permettant de trouver la mesure de l'angle d'inclinaison de la descente sur la surface horizontale de la terre puis trouve cette mesure.

....

Epreuve de l'unité

Choisis la bonne réponse :

1. Un angle, en position standard, de mesure $585°$ est équivalent à l'angle de mesure :
   - A $45°$
   - B $135°$
   - C $225°$
   - D $315°$

2. Si $\sin\theta < 0$ et $\operatorname{tg}\theta > 0$, alors θ est situé dans le .... quadrant :
   - A premier
   - B deuxième
   - C troisième
   - D quatrième

3. Si θ est la meure d'un angle aigu telle que $\sin(\theta + 20°) = \cos 30°$, alors θ est égale à :
   - A $20°$
   - B $30°$
   - C $40°$
   - D $50°$

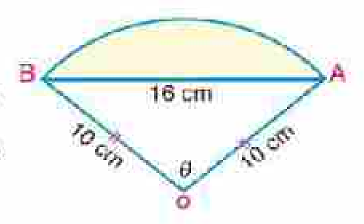
4. L'angle de mesure $(-850°)$ est situé dans le .... quadrant:
   - A premier
   - B deuxième
   - C troisième
   - D quatrième

5. La mesure en degrés d'un angle au centre qui intercepte un arc de longueur 6π dans un cercle de longueur de rayon 9 cm est égale à :
   - A $30°$
   - B $60°$
   - C $120°$
   - D $150°$

6. La plus simple forme de l'expression $\cos(180° + \theta) + \sin(90° - \theta)$ est :
   - A 0
   - B 2
   - C $2\cos\theta$
   - D $2\sin\theta$

7. $\operatorname{tg}(-30°)$ est égale à :
   - A $-\sqrt{3}$
   - B $-\frac{1}{\sqrt{3}}$
   - C $\frac{1}{\sqrt{3}}$
   - D $\sqrt{3}$

Réponds aux questions suivantes :



8. Dans la figure ci-contre, $\overset{\frown}{AB}$ est un arc d'un cercle de centre O et de rayon 10 cm, AB = 16 cm. Trouve θ en radians puis calcule la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$:

9. Si $5\sin A = 4$ où $90° < A < 180°$, trouve la valeur de l'expression : $\sin(180° - A) + \operatorname{tg}(360° - A) + 2\sin(270° - A)$.

10. Mets sous la forme la plus simple l'expression $\sin 120° \cos 330° - \cos 420° \sin(-30°)$.

11. Si $2\cos A - \sqrt{2} = 0$ où A est la mesure d'un angle aigu, trouve en radians la valeur de A.

12. Si le côté final d'un angle de mesure θ en position standard coupe le cercle trigonométrique au point $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ trouve la valeur de $\operatorname{tg}\theta$ et $\sec\theta$.

13. Trouve les fonctions trigonométriques de base d'un angle de mesure θ en position standard si son côté final coupe le cercle trigonométrique au point $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$

Épreuve cumulative

Questions à choix multiples

1. De quel angle le sinus et le cosinus sont négatifs ?

   A 40°   B 140°   C 220°   D 320°

2. La mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 2π dans un cercle de longueur de rayon 6 cm est égale à :

   A $\frac{\pi}{6}$ B $\frac{\pi}{4}$ C $\frac{\pi}{3}$ D $\frac{\pi}{2}$

3. Si $tg\,4\theta = cotg\,2\,\theta$ où θ est une mesure positive d'un angle aigu, alors $\sin(90° - \theta)$ est égale à :

   A $\frac{1}{2}$ B $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D 1

Réponds aux questions suivantes :

4. Si le côté final d'un angle de mesure θ en position standard coupe le cercle trigonométrique au point $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, trouve la valeur de $cotg\,\theta$ et $cosec\,\theta$.

5. Sans utiliser de calculatrice trouve (si c'est possible) la valeur de :

   A $\cos 210°$ B $\sin(-135°)$ C $\sec\frac{3\pi}{2}$ D $cotg(-\frac{2\pi}{3})$

6. Si le côté final d'un angle de mesure $(90° - \theta)$ où θ est la mesure positive d'un angle aigu en position standard coupe le cercle trigonométrique au point $(\frac{4}{5}, K)$, trouve :

   A La valeur de K   B $\sin(90° - \theta)$ C $\cos(90° - \theta)$ D θ en radians

7. **Vélos :** Sur son vélo, Karim roule sur une monté inclinée sur l'horizontale d'un angle de mesure A = 155° en position standard

   A Ecris une fonction trigonométrique exprimant la relation entre A et la longueur de la montée.

   B Trouve la valeur de A à deux décimales près.

Le tableau indique le numéro de la question dans l'épreuve et le numéro de la question dans la leçon pour faciliter la révision en cas de besoin :

No de la question	1	2	3	4	5	6	7
No de la leçon	4-3	4-2	4-4	4-3	4-4	4-4	4-4

Épreuves générales

Epreuve (1)

(Algèbre et trigonométrie)

(1) Complète ce qui suit :

1. Si $x = -1$, est l'une des racines de l'équation $x^2 - a\,x - 2 = 0$, alors $a =$ ....
2. Le signe de la fonction f telle que $f(x) = x^2 + 3$ est ....
3. Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation du second degré ayant pour racines i et $-i$ est ....
4. L'ensemble image de la fonction f telle que $f(\theta) = 3 \sin \theta$ est ....

(2) Choisis la bonne réponse :

1. Si l'une des racines de l'équation $ax^2 + 2x + 5 = 0$ est l'inverse de l'autre, alors a est égale à ....
   - a) -5 b) -2 c) 2 d) 5
2. Le signe de la fonction $f(x) = 6 - 2x$ est positif si ....
   - a) $x > 3$ b) $x \geqslant 3$ c) $x < 3$ d) $x \leqslant 3$
3. L'équation du second degré qui a pour racines $1 + i$ et $1 - i$ où $i^2 = -1$ est ....
   - a) $x^2 + 2x + 2 = 0$ b) $x^2 - 2x + 2 = 0$ c) $x^2 + 2x - 2 = 0$ d) $x^2 - 2x - 2 = 0$
4. Soit θ la mesure d'un angle en position standard tel que $\cos\theta > 0$. A quel quadrant appartient le côté final de l'angle θ ?
   - a) Premier b) Premier ou deuxième c) Premier ou troisième d) Premier ou quatrième

(3)

a) Démontre que les racines de l'équation $x^2 - 5x + 3 = 0$ sont réelles différentes puis trouve, dans $\mathbb{R}$, l'ensemble solution de l'équation en présentant le résultat à un dixième près ....

b) Trouve la forme la plus simple de $\sin(-30°)\cos 420° + \frac{\text{tg } 25°}{\text{cotg } 65°}$ ....

(4)

a) Dans l'équation $(a - 5)\,x^2 + (a - 10)\,x - 5 = 0$, trouve la valeur de a dans chacun des cas suivants :

1°) si la sommes des racines = 4 ....

2°) si l'une des deux racines est l'inverse de l'autre. ....

b) Etudie le signe de la fonction f telle que $f(x) = x^2 + 2x - 15$ en illustrant la réponse sur la droite numérique. ....

(5)

a) Mets le nombre complexe $(26 - 4i) - (9 - 20\,i)$ où $i^2 = -1$ sous la forme la plus simple d'un nombre complexe. ....

b) Liens avec le sport : Un joueur de football lance le ballon vers le but d'une distance de x mètres du gardien. Le gardien saute et attrape le ballon à une hauteur de 2,1 mètres de la surface de la terre. Si le trajet du ballon fait un angle de 30° avec l'horizontal, trouve, à un dixième près, la distance entre le joueur et le gardien au moment du lancement du ballon.



....

Épreuves générales

Epreuve (2)

(Algèbre et trigonométrie)

(1) Complète ce qui suit :

1. L'ensemble solution, dans R, de l'équation $(x+1)^2 = 4$ est ....
2. L'équation du second degré qui a pour racines $3-i$ et $3-i$ où $i^2 = -1$ est ....
3. Le signe de la fonction $f(x)= 3-2x$ est positif si $x \in$ ....
4. Si $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, où $\theta \in]\pi; 2\pi[$, alors $m(\angle \theta) =$ ....

(2) Choisis la bonne réponse :

1. La forme la plus simple du nombre complexe i^{73} est ....
   - a) -1 b) 1 c) $-i$ d) i
2. Le signe de la fonction $f: [-4, 7] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 6 - 2x$ est positif sur l'intervalle ....
   - a) $[-4, 3[$ b) $]3, 7[$ c) $[-4, 7]$ d) $]3, 7[$
3. Si les racines de l'équation $4x^2 - 12x + c = 0$ sont égales, alors c est égale à ....
   - a) 3 b) 4 c) 9 d) 16
4. La mesure en radians de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 3 cm dans un cercle de longueur de rayon 4 cm est égale à ....
   - a) $(\frac{2}{3})^{rad}$ b) $(\frac{3}{2})^{rad}$ c) 5^{rad} d) 6^{rad}

(3)

a) Détermine la nature des racines de l'équation $x^2 + 9 = 6x$, puis trouve son ensemble solution. ....

b) Si $7 \operatorname{cosec} A = 25$ où $\frac{\pi}{2} < A < \pi$, trouve la valeur numérique de l'expression :
$\operatorname{tg}(\pi + A) - \operatorname{cotg}(A - \frac{\pi}{2})$ ....

(4)

a) Trouve la valeur des deux nombres réels a et b qui vérifient l'équation
$(a+3) - (b-1)i = 7 - 9i$ où $i^2 = -1$

....

b) Transforme les degrés en radians ou les radians en degrés :
1°) $215°$ .... 2°) $\frac{8\pi}{6}$ ....

(5)

a) Etudie le signe de la fonction f telle que $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ en illustrant la réponse sur la droite numérique.

b) Si le côté final d'un angle de mesure θ en position standard coupe le cercle d'unité au point $(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5})$ trouve la valeur de $\sin\theta$ et $\operatorname{cotg}\theta$. ....

Épreuves générales

Epreuve (3) (Algèbre et trigonométrie)

(1) Choisis la bonne réponse :

(1) Si L et M sont les racines de l'équation $x^2 - 7x + 3 = 0$, alors $L^2 + M^2$ ....

(a) 7 (b) 3 (c) 58 (d) 79

(2) si $\sin\theta = -1$ et $\cos\theta = 0$, alors θ est égale à ....

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) π (c) $\frac{3\pi}{2}$ (d) 2π

(3) L'équation du second degré qui a pour racines $2 - 3i$ et $2 + 3i$ où $i^2 = -1$ est ....

(a) $x^2 + 4x + 13 = 0$ (b) $x^2 - 4x + 13 = 0$ (c) $x^2 + 4x - 13 = 0$ (d) $x^2 - 4x - 13 = 0$

(4) Si l'une des racines de l'équation $x^2 + (m + 2)x + 3 = 0$ est l'opposée de l'autre, alors m est égale à ....

(a) 3 (b) 2 (c) -2 (d) -3

(2) Complète ce qui suit :

(1) La fonction f : telle que $f(x) = -(x-1)(x+2)$ est positive sur l'intervalle ....

(2) L'angle ayant pour measure 930° est situé dans le .... quadrant.

(3) Si $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors θ est égale à ....

(4) L'équation du second degré dont chacune des racines est le double d'une racine de l'équation $2x^2 - 8x + 5 = 0$, est ....

(3)

(a) Mets le nombre $\frac{2-3i}{3+2i}$ sous forme d'un nombre complexe où $i^2 = -1$ ....

(b) Si $4 \sin A - 3 = 0$, trouve m ($\angle A$) où $A \in]0, \frac{\pi}{2}[$ ....

(4)

(a) Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = -x^2 + 8x - 15$

1°) Trace la courbe représentative de f sur $[1, 7]$

2°) Du graphique, détermine le signe de f .

....

(b) Si $x = 3 + 2i$ et $y = \frac{4-2i}{1-i}$, trouve x + y sous forme d'un nombre complexe. ....

(5)

(a) Trouve l'ensemble solution de l'inéquation $x^2 + 3x - 4 \leqslant 0$ ....

(b) si $\operatorname{tg} B = \frac{3}{4}$ où $180° < B < 270°$, trouve la valeur de $\cos(360° - B) - \cos(90° - B)$ ....

....

Épreuves générales

Epreuve (4)

(Algèbre et trigonométrie)

(1) Complète ce qui suit :

1. Le nombre imaginaire i^{43} sous la forme la plus simple est ....
2. Si les racines de l'équation $x^2 - 6x + L = 0$ sont réelles et égales, alors la valeur de $L =$ ....
3. Si $0° < \theta < 90°$ et $\sin 2\theta = \cos 3\theta$, alors $m(\angle\theta) =$ ....
4. L'ensemble image de la fonction f telle que $f(\theta) = \frac{3}{2} \sin\theta$ est ....

(2) Choisis la bonne réponse :

1. l'équation $x^2(x-1)(x+1)$ du .... dogrè.
   a) premier b) second c) troisième d) quatrième
2. Si les racines de l'équation $x^2 + 3x - M = 0$ sont réelles différentes, alors la valeur de $m =$
   a) 1 b) 2 c) 3 d) 4
3. Sachant que la somme des mesures des angles d'un polygone est $180°(n-2)$ où n est le nombre de côtés, la mesure en radians d'un angle d'un pentagone régulier est ....
   a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{3\pi}{4}$ d) $\frac{2\pi}{3}$
4. Si $2\cos\theta =$ et $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, alors $m(\angle\theta) =$ ....
   a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{6\pi}{7}$ c) $\frac{4\pi}{3}$ d) $\frac{7\pi}{6}$

(3)

A) Trouve la valeur de k pour que l'une des racines de l'équation $4kx^2 + 7x + k^2 + 4 = 0$ soit égale à l'inverse de l'autre racine.

B) Si $\sin\theta = \sin 750° \cos 300° + \sin(-60°) \cot g\, 120°$ où $0° < \theta < 360°$, trouve $m(\angle\theta)$.

(4)

A) **(1)** Trouve les valeurs de a et b qui vérifient l'équation $12 + 3ai = 4b - 27i$.

....

(2) Détermine, dans R, l'ensemble solution de l'inéquation $x(x+1) - 2 \leq 0$.

B) Dans un cercle, dont la longueur du rayon est 18 cm, un angle au centre de mesure θ intercepte un arc de longueur 36 cm. Calcule θ en degrés.

(5)

A) Si la somme des nombres entiers consécutifs $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$ est donnée par la relation $S = \frac{n}{2}(1+n)$, combien de nombres entiers consécutifs faut-il additionner à partir de 1 pour que la somme soit égale à 210?

B) Si $\sin X = \frac{4}{5}$ où $90° < X < 180°$, trouve la valeur de $\sin(180° - X) + tg(360° - X) + 2\sin(270° - X)$.

Épreuves générales

Epreuve (5) (Algèbre et trigonométrie)

(1) Complète ce qui suit :

1. L'expression (–4i) (–6i) sous la forme la plus simple est ....
2. Si les racines de l'équation $x^2 - 3x + k = 0$ sont complexes et différents, alors la valeur de k = ...
3. Si tg θ = tg (90° – θ) où θ est un angle aigu, alors m(∠θ) = ...
4. L'ensemble image de la fonction f telle que f(θ) = 2 cos θ est ....

(2) Choisis la bonne réponse :

1. L'ensemble solution, dans R, de l'équation $2x^2 + 8 = 0$ est ....
   - a) {–2} b) {2} c) {± 2} d) ϕ
2. Le produit de deux racines de l'équation x (2x – 3) = 7 est égal à ....
   - a) $\frac{-3}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{-7}{2}$ d) $\frac{7}{2}$
3. L'angle ayant pour meure en radians $\frac{7\pi}{6}$ a pour mesure en degrés ....
   - a) 105° b) 210° c) 420° d) 840°
4. Si $2\cos\theta = \sqrt{3}$ ou θ est un angle aigu, alors $\sin 3\theta =$ ....
   - a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{3}{2}$

(3) **A** Détermine, dans R, l'ensemble solution de l'inéquation $x^2 \leqslant 6x - 9$. ....

B Mets le nombre $\frac{3+5i}{3-2i}$ sous la forme a + bi.

(4) **A** Trouve les valeurs de a et b qui vérifient l'équation 12 + 3ai = 4b – 27i

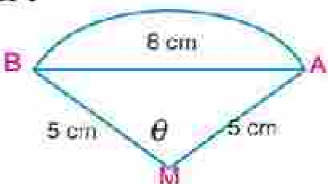
B Si θ est la mesure d'un angle aigu, détermine θ sachant que $tg(\theta + 20°) = cotg(3\theta + 30°)$.

(5) **A** La fonction suivante représente la hauteur «d» en mètres du parachutiste après un temps «t» seconds d'une saute d'une hauteur de 280 mètres sur le sol est déterminée par la relation $d = -2{,}4t^2 + 280$, Combien de temps nécessaire pour que le soldat doit être ouvert son parachute de la hauteur à 220 mètres du sol ?

B Dana la figure ci-contre .

1) Détermine la mesure de l'angle θ en radians.

2) Trouve la longueur de $\overset{\frown}{AB}$



Épreuves générales

Epreuve (6) (Algèbre et trigonométrie)

(1) Complète ce qui suit :

1. L'expression $\sqrt{-8} \times \sqrt{-12}$ sous la forme la plus simple est ....
2. Si les racines de l'équation $x^2 - 2x + c = 0$ sont réelles et égales, alors la valeur de c = ...
3. Si $0° < \theta < 90°$ et $\sin(\theta + 20°) = \cos 60°$, alors $\cos 3\theta$..................
4. Si l'ensemble image de la fonction f telle que $f(\theta) = a \cos \theta$ est $[\frac{-5}{2} ; \frac{5}{2}]$, alors a = ...

(2) Choisis la bonne réponse :

1. L'ensemble solution, don R de l''équation $x^2 - 6x + 9 = 0$ est ....

   a) $\{-3\}$ b) $\{3\}$ c) $\{\pm 3\}$ d) ϕ

2. Si la somme des racines de l'équation $x^2 - ax + 6 = 0$ est égale à 5, alors la valeur de a =

   a) -6 b) -5 c) 5 d) 6

3. Dans un cercle de longueur de rayon 10 cm, la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de mesure .... est égale à 15π cm

   a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $\frac{3\pi}{2}$ c) $\frac{4\pi}{3}$ d) $\frac{5\pi}{3}$

4. Un homme monte une route inclinée sur l'horizontale d'un angle de mesure = 30° en position standard avec une vitesse 5 m/min, alors la hauteur dont l'homme arrive après 10 minutes est égale à ....





   a) 25 m   b) 30 m   c) $2\sqrt{3}$ m   d) 50 m

(3) **A** Détermine, dans C l'ensemble solution de l'équation $4x^2 + 20 = 0$.

B Si $\text{tg}(3\theta - 70°) = \text{cotg}\,\theta$ où $\theta \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$, trouve la valeur de $\sin(2\theta + 10°)$.

(4) **A** Trouve les valeurs de c pour que l'équation $7x^2 + 14x + c = 0$ ait

i) deux racines réelles différentes   ii) deux racines complexes non réelles.

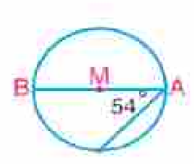
B Si $15\,\text{tg}\,\theta = 8$ où $\theta \in]\frac{\pi}{2} ; \pi[$, trouve la valeur de $5 \sec(2\pi - \theta) + 4\text{tg}(2\pi - \theta)$

(5) **A** Représente la relation $y = x^2 - 4$ graphiquement. Du graphique, trouve

i) son ensemble image   ii) l'ensemble solution de l'équation $f(x) = 0$

iii) le signe de la fonction sur l'intervalle $[-3 ; 3]$

B Dans la figure ci-contre, $\overline{AB}$ est un diamètre d'un cercle M tel que AB = 12 cm m($\angle$A)= 54°. Trouve, la longueur du petit arc $\widehat{AC}$ à deux décimales près.



Épreuves générales

Epreuve (7) (Algèbre et trigonométrie)

(1) Complète ce qui suit :

1. L'expression (13 – 2i) – (3 – 10i) sous la forme a + bi est ....
2. Dans l'équation $2x^2 - 3x - 5 = 0$, la somme des ses racines est égale à .... et leur produit est égal à ....
3. Si cosec $(\theta + 20°) = \sec(3\theta + 30°)$ où $0° < \theta < 90°$, alors $\cos 6\theta =$ ....
4. La valeur maximale de la fonction f telle que $f(\theta) = 4 \sin \theta$ est ....

(2) Choisis la bonne réponse :

1. L'ensemble solution de l''équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ est ....
   - a) {0 ; 6} b) {-2 ; 5} c) {-3 ; -2} d) {2, 3}
2. Si le produit des racines de l'équation $x^2 - 3x + c = 0$ est égale à 2, alors la valeur de c = ...
   - a) -4 b) -2 c) 4 d) 2
3. Dans un cercle de longueur de rayon 6 cm, la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de mesure $\frac{\pi}{3}$ est égale à ....
   - a) $\frac{3\pi}{2}$ cm b) 2π cm c) $\frac{5\pi}{3}$ cm d) 3π cm
4. La longueur d'une pendule simple est 13 cm. Elle move librement avec un angle de mesure 60°. Alors la longueur du trajet de la pendule est égale à ....
   - a) 3π cm b) 4π cm c) 6π cm d) 8π cm

(3)

A) Si L et M sont les racines de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$, trouver une équation du second degré dont les racines sont : (L + 1) et (M + 1).

B) Détermine la solution générale de l'équation $\cos 2\theta = \sin 4\theta$, puis calcule les valeurs de θ où $\theta \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$.

(4)

A) i) Détermine, dans C l'ensemble solution de l'équation $x^2 - 2x + 2 = 0$.

ii) Détermine, dans R, l'ensemble solution de l'inéquation $(x - 1)(x - 3) < 0$

B) Si $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ où α est le plus petit angle positif et $\text{tg}\,\beta = \frac{5}{12}$ où $180° < \beta < 270°$, détermine la valeur de $\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$.

(5)

A) Un terrain a la forme d'un rectangle de dimensions 6 m et 9 m. On veut doubler l'aire du terrain en augmentant ses dimensions d'une même longueur. Trouve la longueur augmentée.

B) Ziad son vélo, roule sur une montée inclinée sur l'horizontale d'un angle de mesure A = 25° en position standard

i) Ecris une fonction trigonométrique exprimant la relation entre la hauteur de la montée et la longueur de la montée.

ii) Trouve la valeur de la hauteur de la montée à deux décimales près

Épreuves générales

Epreuve (8) (Algèbre et trigonométrie)

(1) Complète ce qui suit

1. Si L et M sont les racines de l'équation $\frac{1}{3}x^2 - 4x - 2 = 0$, alors L + M = ... et LM = ...
2. L'expression $(6 + i)(4 - 3i)$ sous la forme la plus simple = ...
3. Si $\text{tg } 4\theta = \text{cotg } 5\theta$ où $0° < \theta < 90°$, alors $\cos(90° - 3\theta)$ = ...
4. La valeur maximale de la fonction f telle que $f(\theta) = 3\cos\theta$ est ....

(2) Choisis la bonne réponse:

1. L'ensemble solution, dansR, de l''équation $6x^2 - x - 2 = 0$ est ....
   - a $\{0 ; -2\}$ b $\{\frac{1}{2} ; \frac{-2}{3}\}$ c $\{-\frac{1}{2} ; \frac{2}{3}\}$ D $\{2 ; 0\}$
2. Si L et 2 – L sont les racines de l'équation $x^2 + kx + 6 = 0$, alors la valeur de k = ...
   - a 1 b 2 c 3 D 5
3. Dans un triangle, la mesure de l'un des angles est $\frac{\pi}{4}$ et la mesure d'un autre angle est $\frac{5\pi}{12}$. Alors la mesure du troisième angle du triangle = ...
   - a $\frac{\pi}{6}$ b $\frac{\pi}{5}$ c $\frac{\pi}{3}$ D $\frac{\pi}{2}$
4. Soit $f(x) = 3\sin x$ où $X \in R$, alors la plus grande valeur de la fonction f(x) est ....
   - a –3 b 0 c 1 D 3

(3) A i) Déterminer le signe de la fonction f telle que $f(x) = 8x - x^2 - 15$ sur l'intervalle [2 ; 6].

ii) Détermine, dans R, l'ensemble solution de l'inéquation $(x - 2)^2 \leqslant -5$. ....

B Soit un angle de mesure θ en position standard. Trouver les valeurs de toutes les fonctions trigonométriques de l'angle θ sachant que son côté final coupe le cercle trigonométrique au point $B\left(x ; \frac{3}{5}\right)$, détermine la valeur de l'expression suivante $\sin(90° + \theta) + \text{cotg}(180° + \theta)\cos(90° + \theta)$.

(4) A Si L et M sont les racines de l'équation $x^2 + 5x + 6 = 0$, trouver une équation dont les racines sont : L^2 et M^2.

B Si $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ où $90° < \alpha < 180°$, $\text{tg } \beta = -\frac{12}{5}$ où $270° < \beta < 360°$ et $\sin\theta = \sin(180° - \alpha)\cos(\beta - 180°)\cos\alpha$, détermine la valeur de θ à une minute près où $0° < \theta < 90°$.

(5) A Utilise la loi d'Ohm (U = I × R) où (U) est la différence de potentiel en Volts, (I) est l'intensité du courant électrique en Ampères, (R) est la résistance en Ohm. Si l'intensité totale du courant électrique passant entre deux résistances est égale à 5 – 2i Ampère et si l'intensité du courant passant dans l'une des deux résistances est égale à 5 + 3i Ohm.

B La longueur d'une montée est 42 mètres et la longueur de sa hauteur est 9 mètres. Ecris une fonction trigonométrique qu'on peut utiliser pour calculer la mesure de l'angle d'inclinaison de la montée avec le sol horizontal, puis détermine sa mesure.

Épreuves générales

Epreuve (9)

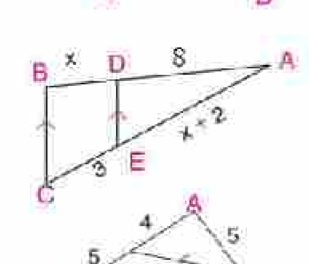
(Géométrie)

(1) Complète :

1) Dans la figure ci–contre, $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$:

A) Si $\frac{AD}{DB}$, $\frac{5}{3}$, alors $\frac{AB}{BD} = \frac{.....}{.....}$ et $\frac{CE}{EA} = \frac{.....}{.....}$

B) En utilisant la figure ci–contre, la valeur de x = ...

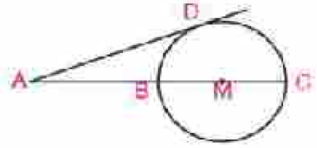


C) En utilisant la figure ci–contre, la valeur de y = ...

2) Complète:

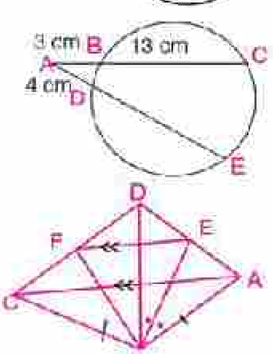
A) La bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure d'un même angle sont ....

B) Si la puissance d'un point A par rapport à un cercle de centre M est négative, alors le point A est situé ....



C) **Dans la figure ci–contre, le cercle M a pour longueur** de rayon 5 cm et $\overrightarrow{AD}$ est une tangente au cercle en D. Si AD = 12 cm. alors la longueur de $\overline{AC}$ est égale à: ....

D) **En utilisant la figure ci–contre, la longueur de** $\overline{DE}$ = ...

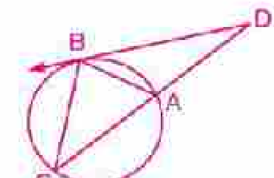


3) A) Dans la figure ci–contre, AB = BC, $\overrightarrow{BE}$ est une bissectrice de l'angle (∠ ABD), $\overline{EF}$ // $\overline{AC}$. Démontre que $\overrightarrow{BF}$ est une bissectrice de l'angle (∠ DBC).

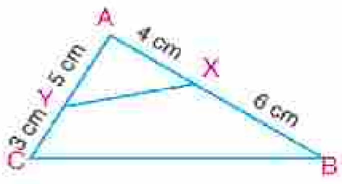
C) Les aires de deux triangles semblables sont 100 cm² et 64 cm² respectivement. Si le périmètre du premier triangle est égal à 60 cm, détermine le périmètre de l'autre.

4) A) ABC est un triangle. D ∈ $\overline{AB}$ et E ∈ $\overline{AC}$ tels que AD = 3 cm, DB = 6 cm, AE = 2 cm et EC = 4 cm. Démontre que $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$.

B) **Dans la figure ci–contre :** $\overrightarrow{DB}$ est une tangente au cercle en B et $\overline{DC}$ est une sécante au cercle en A et C respectivement. Démontre que Δ DBA ~ Δ DCB.
Si DA = 4 cm et AC = 5 cm, détermine la longueur de $\overline{DB}$.



5) **Dans la figure ci-contre,** A B C est un triangle. $X \in \overline{AB}$ tel que A X = 4 cm, X B = 6 cm, $Y \in \overline{AC}$ tel que A Y = 5 cm, YC = 3 cm.



A Démontre que le quadrilatère XBCY est inscriptible.

B Si A (△ A X Y) = 8 cm², trouve l'aire du quadrilatère XBCY.

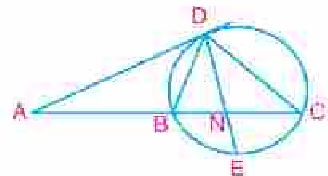
Epreuve (10) (Géométrie)

(1) Complète :

A Le rapport entre les aires de deux triangles semblables est égal au rapport entre ....

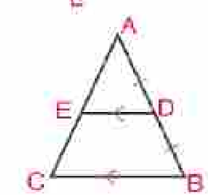
B Deux polygones sont semblables si ....et ....

C **Dans la figure ci-contre, complète** :



1. $(AD)^2 =$ ....
2. △ A D C ~ △ ....

(2) Complète :



A Si l'aire du triangle ADE = 16 cm².
Alors l'aire du triangle ABC = ... cm².

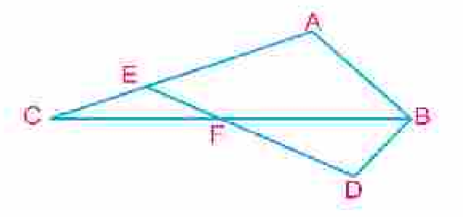
B Si la distance d'un point au centre d'un cercle est égale à 25 cm et la puissance de ce point par rapport au cercle est égale à 400, alors la longueur du rayon de ce cercle est égale à ....

C La bissectrice intérieure d'un angle au sommet d'un triangle isocèle .... à la base du triangle.

D Les bissectrices des angles d'un triangle sont ....

(3) Dans la figure ci-contre, AB = 6 cm, BC = 12 cm,

CA = 8 cm, FC = 3 cm , DB = 4,5 cm et DF = 6 cm.



Démontre que : **A** △ A B C ~ △ D B F.

B △ E F C est isocèle

(4) Soit XYZ un triangle. La bissectrice de l'angle Y coupe $\overline{XZ}$ en M. On trace $\overline{NM} \parallel \overline{YZ}$ qui coupe $\overline{XY}$ en N. Démontre que $\frac{XY}{YZ} = \frac{XN}{YN}$. Si XY = 6 cm et YZ = 4 cm, trouve la longueur de $\overline{XN}$.

(5) Soit ABC un triangle rectangle en A. On trace $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ qui le coupe en D. On trace les deux triangles équilatéraux ABE et CAF à l'extérieur du triangle ABC. Démontre que :

a) quadrilatère ADBE ~ quadrilatère CDAF.

b) $\dfrac{\text{Aire du quadrilatère ADBE}}{\text{Aire du quadrilatère CDAF}} = \dfrac{BD}{CD}$

Epreuve (11) (Géométrie)

(1) Complète ce qui suit :

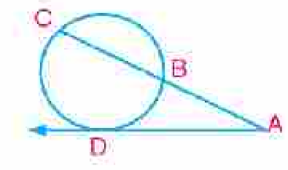
1) A) Si une droite est parallèle à un côté d'un triangle, elle découpe les deux autres côtés ....

B) **Dans la figure ci-contre,** si $\overrightarrow{AD}$ est une tangente au cercle en D, alors :

1°) $AC \times AB =$ ....

2°) si $AC = 8$ cm et $AB = 2$cm, alors $AD =$ ....

3°) si $AB = BC$ et $AD = 3\sqrt{2}$ cm, alors $AC =$ ....

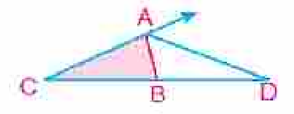


(2) Complète :

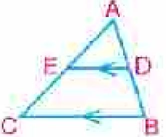
1) Des droites parallèles découpent sur deux droites sécantes des segments homologues de ....

2) Le rapport entre les périmètres de deux polygones semblables est 2 : 3. Si l'aire du petit polygone est 40 cm², alors l'aire du deuxième polygone est ....

3) **Dans la figure ci-contre :**
Si $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{BA}{CA}$, alors $\overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de $\angle$ ....



4) **Dans la figure ci-contre :**
Si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, alors $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{\cdots}{\cdots}$

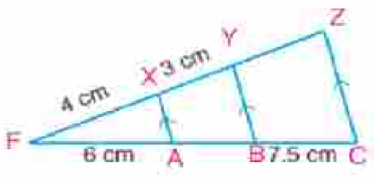


(3)

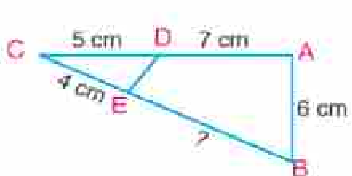
A) Si le rapport entre les aires de deux polygones semblables est 16 : 49 , quel est le rapport des longueurs de deux côtés correspondants ? Et quel est le rapport de leurs périmètres ?

B) Soient deux cercles sécants en A et B. On trace une tangente commune aux deux cercles en X et Y. Si $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{XY} = \{C\}$, démontre que C est le milieu $\overline{XY}$.

(4) **A** **Dans la figure ci-contre:** $\overline{AX} \parallel \overline{BY} \parallel \overline{CZ}$,
$FA = 6$ cm , $FX = 4$ cm , $XY = 3$ cm et
$BC = 7.5$ cm. Trouve la longueur de $\overline{AB}$ et $\overline{ZY}$.

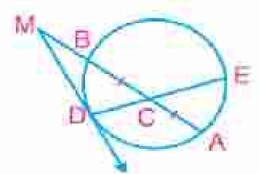


B **Dans la figure ci-contre :**
$\triangle CDE \sim \triangle CBA$.
En utilisant les longueurs indiquées sur le dessin,
trouve la longueur de $\overline{BE}$ et $\overline{DE}$.



(5) **A** Trouve la puissance du point C par rapport au cercle de centre M si la longueur du rayon du cercle est 6 cm et CM = 6 cm.

B **Dans la figure ci-contre,** $\overline{AB} \cap \overline{DE} = \{C\}$,
$CA = CB$, $CD = 2$cm , $CE = 8$ cm,
et $\overline{MD}$ est tangent au cercle. Si $MB = \frac{1}{2} AB$.
trouve la longueur de $\overline{MD}$.



Epreuve (12) (Géométrie)

(1) Complète :

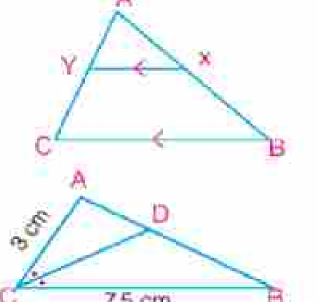
A Des droites parallèles découpent sur deux droites sécantes des segments homologues de ....

B Le rapport entre les aires de deux triangles semblables est 3 : 5 . Si l'aire du premier triangle est 36 cm², alors l'aire du deuxième triangle est ....

C **Dans la figure ci-contre,** si $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ et $XY : BC = 3 : 8$ alors :

A AX : XB = ... : ....

B Périmètre ($\triangle AXY$) : Périmètre ($\triangle ABC$) = ... : ....



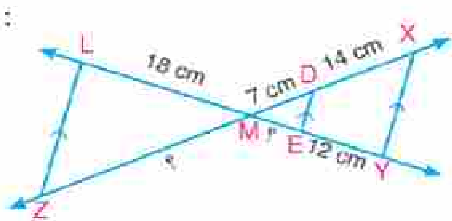
D **Dans la figure ci-contre,** si $\overrightarrow{CD}$ est une bissectrice de ($\angle C$),
$AC = 3$ cm et $BC = 7.5$ cm, alors $AD : BD =$ ....

(2)

A **Dans la figure ci-contre,** $\overline{XY} \parallel \overline{DE} \parallel \overline{LZ}$, Trouve :

1°) la longueur de $\overline{EM}$ = ...

2°) la longueur de $\overline{MZ}$ = ...

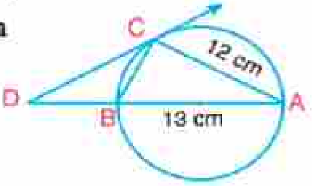


Épreuves générales

B **Dans la figure ci-contre,** $\overline{AB}$ **est un diamètre d'un cercle ,** $\overline{CD}$ **est tangent au cercle en C , AC = 12 cm et AB = 13 cm**

(1) la longueur de $\overline{CD}$ = ...

(2) l'aire de Δ ABC = ...



(3)

A Trouve la puissance du point A par rapport au cercle de centre M, si la longueur du rayon du cercle est 3 cm et AM = 4 cm.

B Un architecte a dessiné le plan d'un terrain rectangulaire de longueur égale au double de la largeur et d'aire 200 mètres carrés à l'échelle 1 : 200 . Trouve la longueur du terrain dans le plan.

(4)

A Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 20 cm et AC = 15 cm. D ∈ $\overline{BC}$ tel que BD = 10 cm. On trace $\overrightarrow{AE} \perp \overline{BC}$ qui coupe $\overline{BC}$ en E. Du point D on trace $\overline{DF}$ // $\overline{BA}$ qui coupe $\overline{AE}$ en F.

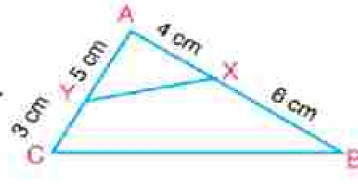
Démontre que $\overrightarrow{CF}$ est une bissectrice de ∠C..

B **Dans la figure ci-contre,** A B C est un triangle. $X \in \overline{AB}$ tel que AX = 4 cm, X B = 6 cm. Y ∈ $\overline{AC}$ tel que A Y = 5 cm. YC = 3 cm.

A Démontre que Δ A X Y ~ Δ A C B.

B Démontre que le quadrilatère XBCY est inscriptible..

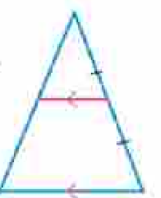
C Si A (Δ A X Y) = 8 cm²,
trouve l'aire du quadrilatère XBCY.



Epreuve (13) (Géométrie)

1) Complète

1. Deux polygones semblables si .... , ...
2. Deux triangles rectangles sont semblables si la mesure d'un ....
3. Le rapport entre les aires de deux triangles semblables est égal ....
4. **Dans la figure ci-contre :** Si l'aire du grand triangle est égale à 16 cm², alors l'aire du grand triangle est ....

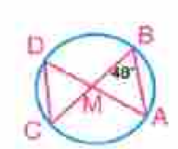


2) Choisis la bonne réponse :

1. Dans la figure ci-contre : Si m(∠ABC) = 48°, alors :

I) m($\overset{\frown}{AC}$) = **A** 24° **B** 42° **C** 48° **D** 96°

II) m (∠ADC) = **A** 24° **B** 42° **C** 48° **D** 96°



Épreuves générales

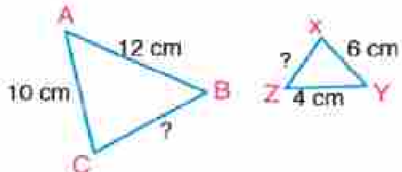
2 Le rapport entre les longueurs des diamètres de deux cercles est 3 : 5 . Si l'aire du petit cercle est 27 cm^2 , alors l'aire du grand cercle, en cm^2, est égale à :

A 45 **B** 50 **C** 75 **D** 100

3 La longueur de l'un de deux hexagones réguliers est 6 cm et le périmètre de l'autre est 48 cm, alors le rapport entre la longueur du premier hexagone au deuxième est :

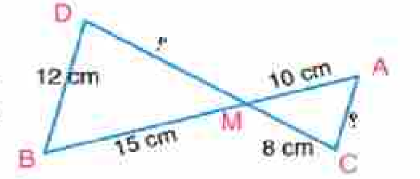
A 1 : 8 **B** 3 : 24 **C** 1 : 2 **D** 3 : 4

3) **A** $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$, $XY = 6$ cm , $YZ = 4$ cm
$AB = 12$ cm , $AC = 10$ cm
Détermine la longueur de : $\overline{BC}$ et $\overline{XZ}$

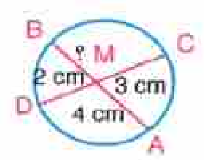


B Les longueurs des côtés du triangle ABC sont 10 , 15 , 20 cm et les longueurs des côtés correspondants du triangle DEF sont 6 , 9 , 12 cm respectivement Détermine :
1) le rapport entre leurs périmètres 2) le rapport entre leurs aires

4) **A** **Dans la figure ci-contre :** $\overline{AC} \parallel \overline{DB}$. AM= 10 cm . MB = 15 cm . CM = 8 cm . BD = 12 cm. trouve la longueur de : $\overline{AC}$. $\overline{MD}$



B **Dans la figure ci-contre :** $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{M\}$, MA = 4 cm, MC = 3 cm et MD = 2 cm . Détermine la longueur de $\overline{BM}$



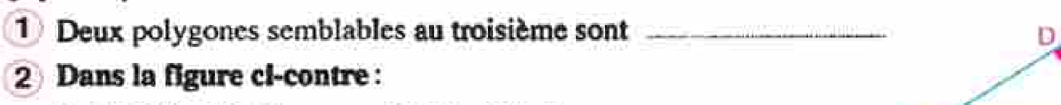
5) **A** **Dans la figure ci-contre :** $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$, $\overline{XZ} \parallel \overline{BY}$, AX = 6 cm, XB = 9 cm et AZ = 3 cm.
Détermine la longueur de : $\overline{ZY}$, $\overline{YC}$

B **Dans la figure ci-contre :** L'un de deux carrés est tracé à l'intérieur du cercle et l'autre carré est tracé à l'extérieur du même cercle
Démontre que le rapport entre leurs aires est égal à $\frac{1}{2}$

Épreuves générales

Epreuve (14) (Géométrie)

(1) Complète :



1. Deux polygones semblables au troisième sont ....

2. **Dans la figure ci-contre :**

   i) $(AB)^2 = AD \times$ .... , $(CB)^2 = CA \times$ ....

   ii) $DA \times DC =$ ....

   iii) $AB \times BC =$ .... $\times$ ....

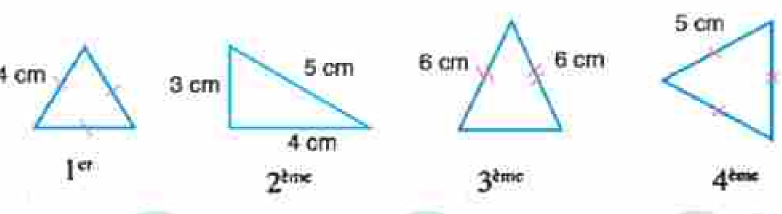


(2) Choisis la bonne réponse :

1. Soient deux rectangles semblables. La longueur du premier est 5 cm et la longueur du deuxième est 10 cm. Alors le rapport entre le périmètre du premier au périmètre du second est :

   A 1 : 5 B 1 : 3 B 1 : 2 D 2 : 1

2. Parmi les triangles suivants, lesquels sont semblables ?



   A 1er et 4ème B 2ème et 3ème C 1er et 3ème D 3ème et 4ème

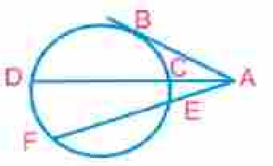
3. Si le rapport entre les périmètres de deux triangles semblables est 1 : 4, alors le rapport entre leurs aires est

   A 1 : 2 B 1 : 4 C 1 : 8 D 1 : 16

4. **Dans la figure ci-contre :** Toutes les réponses suivantes sont correctes sauf une. Laquelle :

   A $(AB)^2 = AC \times AD$ B $(AB)^2 = AE \times AF$

   C $AC \times AD = AE \times AF$ D $AC \times CD = AE \times EF$



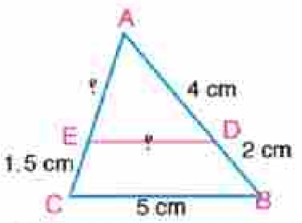
(3)

A **Dans la figure ci-contre :** $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

Démontre que : $\overline{DE} // \overline{BC}$

Si AD = 4 cm, DB = 2 cm, EC = 1,5 cm et BC = 5 cm.

Calcule la longueur de $\overline{AE}$ et de $\overline{DE}$



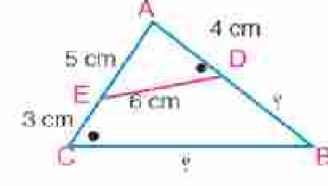
B ABC est un triangle, $E \in \overline{BC}$ tel que BD = 5 cm, DC = 3 cm, $E \in \overline{AC}$ tel que AE = 2 cm, CE = 4 cm. Démontre que $\triangle DEC \sim \triangle ABC$, puis calcule le rapport entre leurs aires.

(4)

A Dans la figure ci-contre : m(∠ADE) = m(∠ACB)

AD = 4 cm . AE = 5 cm , DE = 6 cm , et EC = 3 cm

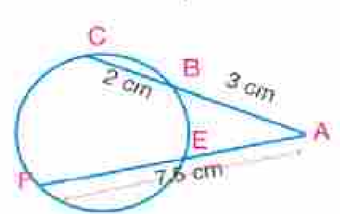
Détermine la longueur de $\overline{DB}$ et de $\overline{BC}$



B $\overline{CB} \cap \overline{EF} = \{A\}$

AB = 3 cm . BC = 2 cm et AF = 7,5 cm

Détermine la longueur de $\overline{EF}$



(5)

A $\overline{AD}$ est une médiane dans un triangle ABC, $\overrightarrow{CE}$ est une bissectrice de ∠ ADB qui coupe en E et $\overrightarrow{DF}$ est une bissectrice de ∠ADC qui coupe $\overline{AC}$ en F.

Démontre que $\overline{EF}$ // $\overline{BC}$

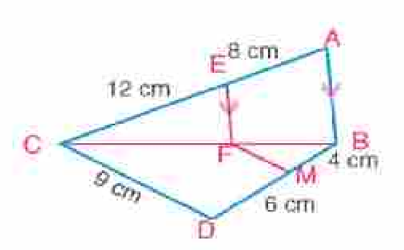
B Dans la figure ci-contre :

$\overline{AB}$ // $\overline{EF}$, AE = 8 cm, CE = 12 cm, CF = 9 cm,

BM = 4 cm, . DM = 6 cm

Détermine la longueur de $\overline{BF}$

Démontre que : $\overline{FM}$ // $\overline{CD}$



Epreuve (15) (Géométrie)

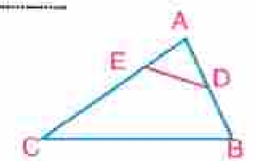
(1) Complète

1. Deux polygones réguliers de même nombre de côtés sont ....

2. Dans la figure ci-contre :

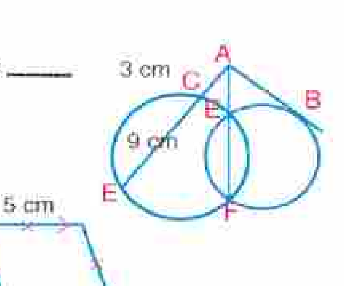
   Si △ ADE ~ △ ACB

   alors m (∠ ADE) = m(∠............)



3. Si deux droites contenant respectivement deux cordes $\overline{XY}$ et $\overline{DE}$ d'un cercle se coupent en un point N , alors : ND . NE = ...

4. Dans la figure ci-contre : Si AC = 3 cm, CE = 9 cm alors AB = ...

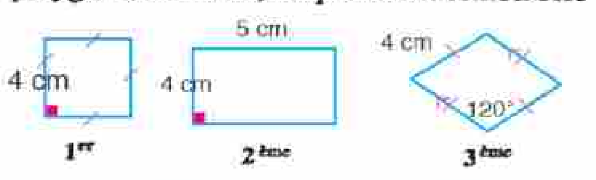


(2) Choisis la bonne réponse :

1. Parmi les polygones suivants, lesquels sont semblables ?







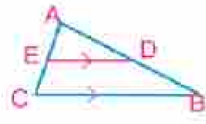
A 1er et 2ème **B** 1er et 3ème **C** 3ème et 4ème **D** 2ème et 4ème

Épreuves générales

2) Si le rapport des aires de deux polygones semblables est **16 : 25**, alors le rapport entre leurs côtés correspondants est

A) 2 : 5 B) 4 : 5 C) 16 : 25 D) 16 : 41

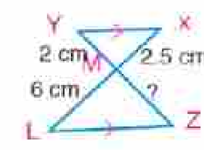
3) Dans la figure ci-contre : Toutes les réponses suivantes sont correctes sauf une. Laquelle ?



A) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ B) $\frac{AD}{DB} = \frac{DE}{BC}$

C) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ D) $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{EC}$

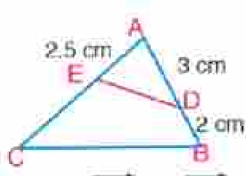
4) Dans la figure ci-contre : La longueur de $\overline{MZ}$ = :



A) 3.6 cm B) 4 cm C) 4.2 cm D) 4.8 cm

(3)

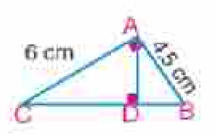
A) D'après la figure ci-contre :△ ABC ~ △ AED
démontrer que BCED est un quadrilatère inscriptible
Si AD = 3 cm, BD = 2 cm et AE = 2,5 cm
Détermine la longueur de $\overline{EC}$



B) ABCD est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en E. On trace $\overrightarrow{EF}$ // $\overrightarrow{CB}$ qui coupe $\overline{AB}$ en F. $\overrightarrow{EM}$ // $\overrightarrow{CD}$ qui coupe $\overline{AD}$ en M.
Démontrer que $\overrightarrow{FM}$ // $\overrightarrow{BD}$

(4)

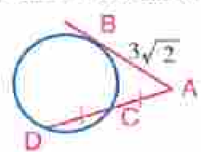
A) **Dans la figure ci-contre:** m (∠ BAC) = 90°, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$,
AB = 4,5 cm, AC = 6 cm
détermine la longueur de $\overline{BD}$, de $\overline{DC}$, de $\overline{AD}$



B) ABCD est un quadrilatère tel que BC = 27 cm , AB = 12 cm, AD = 8 cm, DC = 12 cm et AC = 18 cm. Démontre que △ BAC ~ △ ADC puis détermine le rapport entre leurs aires .

(5)

A) **Dans la figure ci-contre** : $\overline{AB}$ est un tangent au cercle,
C est le milieu de $\overline{AD}$. AB = 3 $\sqrt{2}$ Détermine la longueur de $\overline{AC}$.

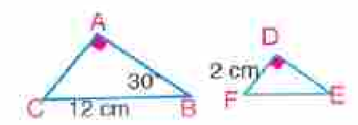


B) ABC est un triangle, AB = 8 cm, AC = 12 cm, BC = 15 cm, On trace $\overrightarrow{AD}$ une bissectrice de ∠ A , qui coupe $\overline{BC}$ en D. $\overline{DE}$ // $\overline{BA}$ qui coupe $\overline{AC}$ en E. Calcule la longueur de et de $\overline{BD}$ et de $\overline{CE}$

Epreuve (16) (Géométrie)

(1) Complète

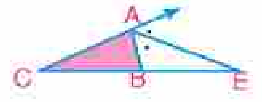
1) **Dans la figure ci-contre : △ABC ~ △DEF**
i) m (∠F) = ...°, AB = ... cm
ii) EF = ... cm



2) **Si une droite est parallèle à un côté d'un triangle, elle découpe les deux autres côtés ......**

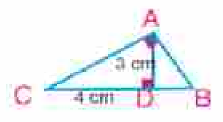
Épreuves générales

③ Dans la figure ci-contre : $\frac{AC}{AB} = \frac{EC}{......}$



(2) Choisis la bonne réponse :

① Dans la figure ci-contre:



m (∠ BAC) = m (∠ ADC) = 90°, AD = 3 cm, CD = 4 cm

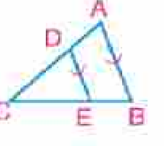
Alors aire (△ BAD) : aire (△ BCA) = ...

a 3 : 4 b 4 : 5 c 3 : 5 d 9 : 25

② Deux rectangles sont semblables. La longueur du premier rectangle est le triple de sa hauteur . Si la longueur du deuxième rectangle est 12 cm, alors sa hauteur mesure

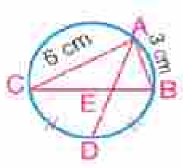
a 2 cm b 3 cm c 4 cm d 6 cm

③ **Dans la figure ci-contre :** $\frac{CA}{AD} =$ ....



a $\frac{DE}{AB}$ b $\frac{CB}{BE}$ c $\frac{CB}{CE}$ d $\frac{CE}{BE}$

④ **Dans la figure ci-contre :** $\frac{BE}{BC} =$ ....



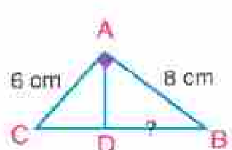
a $\frac{1}{3}$ cm b $\frac{1}{2}$ cm c 2 cm d 3 cm

(3)

A △ DBA ~ △ ABC, m (∠ BAC) = 90°

Démontre que $\overrightarrow{AD} \perp \overline{BC}$ .Si AB = 8 cm et AC = 6 cm,

Calcule la longueur de $\overline{DB}$



B ABC est un triangle tel que X ∈ $\overline{BC}$ On trace $\overline{AX}$: On trace la bissectrice de ∠ABC qui coupe $\overline{AX}$ en Y , puis on trace $\overrightarrow{YZ}$ // $\overline{BC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en Z. Démontre que $\frac{AB}{BX} = \frac{AZ}{ZC}$

Si AB = 6 cm, BX = 8 cm, AX = 7 cm et AC = 14 cm, détermine la longueur de $\overline{AY}$ et de $\overline{ZC}$

(4)

A ABCD est un quadrilatère inscriptible. $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{CD}$ = {E} Démontrer que :

i) △ EAD ~ △ ECB ii) EA . EB = ED . EC

B ABCD est un parallélogramme et E ∈ $\overrightarrow{BA}$ et E ∉ $\overline{BA}$, on trace $\overline{EC}$ qui coupe $\overline{AD}$ en F et $\overline{BD}$ en M. Démontre que $\frac{CM}{MF} = \frac{ME}{MC}$

(5)

Dans la figure ci-contre : AD = DB = 2 cm, AE = 1 cm et EC = 7 cm, détermine

i) $\frac{\text{Aire } (\triangle ADE)}{\text{Aire } (\triangle ACB)}$ ii) $\frac{\text{Aire } (\triangle ADE)}{\text{Aire (figure DBCE)}}$

iii) Démontre que DBCE est un quadrilatère inscriptible.

Réponse de certains exercices

Unité (1) : Algèbre, relations et fonctions

Leçon (1 – 1)

(1) b (2) d (3) d (4) d (5) a

(7) A $\{-2\}$ B ϕ C $\{-3, 1\}$

(8) A $\{-5, 8\}$ B $\{-3, \frac{1}{2}\}$ C $\{-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\}$

D $\{6.74, -0.74\}$ E $\{2.61, -4.61\}$ F $\{2.14, -0.94\}$

(9) A $\{4.7, -4.7\}$ B $\{4.4, 1.6\}$ C $\{-4, -2\}$

(10) A $n = 12$ B $n = 18$ C $n = 22$ D $n = 30$

(11) A $f(x) = x^2 + x - 6$ B $f(x) = -x^2 - 3x$

C $f(x) = x^2 - 7x$

(12) La réponse de Ziaad est fausse car il a divisé les deux membres par une variable qui est $(x - 3)$.

(13) $n = 2$ or $n = 4$

Leçon (1 – 2)

(1) A 1 B $-i$ C -1 D $-i$

(2) A $\pm 6\sqrt{6}$

(3) A $5 - 3i$ B $17 + 16i$ C $11 + 45i$

(4) A $1 + 5i$ B $4 + 7i$

(5) A $1 - i$ B $1 - 4i$ C $\frac{3}{10} - \frac{11}{10}i$ D $\frac{6}{5} + \frac{8}{5}i$

(6) C $\pm 3\sqrt{2}\, i$

(8) La réponse d'Ahmed est correcte

Leçon (1 – 3)

(1) b (2) b (3) a

(4) A deux racines complexes B deux racines réelles irrationnelles

C deux racines égales D deux racines complexes

(5) A $2 + i, 2 - i$ B $-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

(6) A $16 - 4K > 0, K < 4$ B $9 - 4 \times (2 + \frac{1}{K}) = 0, K = 4$

C $64 - 4 \times 16K < 0, K < 1$

(7) Le discriminant $= (L - M)^2 + 4LM = (L - M)^2$ carré parfait, les deux racines sont rationnels.

(9) La réponse d'Ahmed est fausse parce que le terme constant dans l'équation est -5.

(11) L'ensemble solution est $\{3i, -2i\}$

Leçon (1 – 4)

(1) 6, -9 (2) 8 (3) $x^2 - 5x + 6 = 0$

(5) c (6) c (7) c

(8) A $\frac{-19}{3}, \frac{-14}{3}$ B $-1, \frac{-35}{4}$

(9) A $-3, 3$ B $2, \frac{1}{2}$

(10) A $a = -7, b = 10$ B $a = 1, b = 4$

(11) A réelles rationnelles, $\{-7, 5\}$

B complexes, $\{-\frac{3}{4} + 1.7i, -\frac{3}{4} - 1.7i\}$

C complexes $\{2 + i, 2 - i\}$ D réelles égales $(\frac{4}{3})$

(12) $c = 4$ (13) $a = 4$

(14) $c = \frac{25}{12}$, L'ensemble solution est $\{\frac{5}{6}\}$

(15) $k = 1$ (16) $k = 2$

(17) A $x^2 - 2x - 8 = 0$ B $x^2 + 25 = 0$

C $6x^2 - 13x + 6 = 0$ E $x^2 + 17 = 0$

(18) $x^2 - 8x + 5 = 0$ (19) $x^2 - 9x - 1 = 0$

(21) A $x^2 - 14x - 12 = 0$ B $x^2 - 11x + 21 = 0$

C $3x^2 + 14x + 4 = 0$ D $x^2 + 10x - 21 = 0$

(22) $54 \times 2 = (x + 6)(x + 9)$, $x^2 + 15x - 54 = 0$, $x = 3$

(24) La solution de Youssef est correcte (25) $k = 0$ or $k = -\frac{8}{3}$

Leçon (1-5)

(1) Négative, $\mathbb{R}$ (2) Positive, $\mathbb{R}$ (3) $\mathbb{R} - \{3\}$ (4) $]2, +\infty[$

(5) $]3, +\infty[$ (6) $]-2, 1[$ (7) $]-5, 1[$

(8) $]2, +\infty[,]-\infty, 2[$ (9) $\{-1, 3\}, \mathbb{R} - [-1, 3],]-1, 3[$

(10) A Positive dans $\mathbb{R}$

B positive dans $]-\infty, 0[$, négative dans $]-\infty, 0[$ et 0 si $x = 0$

C Positive dans $]-\infty, 0[$, negative dans $]0, \infty[$ si $x = 0$

D positive in $x < -2$, négative dans $x > -2$, 0 si $x = -2$

E Positive si $x < \frac{3}{2}$, négative si $x > \frac{3}{2}$, 0 si $x = \frac{3}{2}$

F positive dans $\mathbb{R} - [-2, 2]$, négative dans $]-2, 2[$, 0 si $x \in \{-2, 2\}$

(11) Du graphique on a: $f(x) = 0$ si $x \in \{-3, 3\}$,

$f(x) > 0$ dans $]3, 4]$ $f(x) < 0$ dans $]-3, 3[$

(12) $f(x) = 0$ si $x \in \{-1.2, 3.2\}$

$f(x) < 0$ si $x \in [-3, -1.2[\cup]3.2, 5]$

$f(x) > 0$ si $x \in [-1.2, 3.2[$

(14) La fonction est positive pour toutes les valeurs réelles de n, 480, 1740, l'an 2006.

Leçon (1-6)

(1) $[-3, 3]$ (2) $[-1, 1]$ (3) $\mathbb{R} -]0, 2[$ (4) ϕ

(5) $]2, 5[$ (6) $[-3, 1]$ (7) ϕ (8) ϕ

Exercices généraux

(1) b (2) d (3) a (4) b

(17) A $5, -4$ B $11, -13$ C $4, -2$

Épreuve cumulative

(1) A $k = \frac{4}{3}$ B $k < \frac{4}{3}$ C $k > \frac{3}{2}$

(2) A $k = -\frac{3}{2}, k = 6$ B $k = 6$ C $k = \frac{7}{2}$

(3) A $x^2 - 9x + 18 = 0$ B $x^2 - 5x + 6 = 0$

(6) $f(x) = 0$ si $x = -2, x = \frac{3}{4}$, $f(x)$ positive dans $]-2, \frac{3}{4}[$

$f(x)$ négative dans $]-3, -2[\cup]\frac{3}{4}, 2[$

(7) A ϕ B $\mathbb{R} - [1, 5]$ C ϕ

D $]-3, 1[$ E $\{5\}$ F $\mathbb{R} -]-\frac{3}{2}, 5]$

Epreuve de l'unité

(1) b (2) b (3) b (4) a

(6) A $x^2 - 3x + 1 = 0$

B $f(x) = 0$ si $x = \{-4, 2\}$ $f(x) = 0$ si $x =]-4, 2[$

$f(x) = 0$ si $x = \mathbb{R} - [-4, 2]$

(7) A $\{0.697, 4.303\}$ B $[-2, 7]$

Unité 2 : Similitude

Leçon (2 - 1)

(1) B quadrilatère ABCD ~ quadrilatère XYZL, $\frac{10}{7}$

Réponse de certains exercices

(C) $\triangle ABC \sim \triangle EDF$, $\frac{7}{12}$
(D) quadrilatère ABCD ~ quadrilatère. ZLXY , $\frac{5}{4}$
(2) (A) XY (B) CD (C) DA
(4) (A) 9.6cm, 540cm² (B) 12.8 cm, 9.6 cm²
(5) (A) Rapport de similitude de $M_1 \sim$ à $M_3 = 4$
Rapport de similitude de $M_2 \sim$ à $M_3 = 3$
(B) Rapport de similitude de $M_1 \sim$ à $M_3 = 1$
Rapport de similitude de $M_2 \sim$ à $M_3 = \frac{3}{2}$
(6) $x = 110, y = 100, z = 70$ $\ell = 21, m = 28, n = 30$
(7) environ 10 cm. (8) 60cm, 2400cm²
(9) (A) 8.4 m, 5.1 m (B) 5.1 m, 3.9 m
(C) 19.44 m² (D) 110.25 m².

Leçon (2 - 2)

(1) (A) Les angles correspondants ont même mesure.
(D) Les côtés correspondants sont proportionnels
(E) deux paires de côtés de longueurs proportionnelles et les angles compris ont même mesure.
(F) deux paires de côtés de longueurs proportionnelles et les angles compris ont même mesure
(2) (A) $x = 36$ (B) $x = 20, y = 15$ (C) $x = 3, y = 4, z = 8.4$
(3) (A) x (B) y (C) y (D) N, M
(4) CE = 5cm. (7) BD = 6cm, AB = $6\sqrt{3}$cm, AC = $6\sqrt{6}$cm
(12) $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, Rapport de similitude = $\frac{1}{\sqrt{5}}$
(16) (A) 4km (B) $4\sqrt{5}$km

Leçon (2 - 3)

(1) (A) $\frac{1}{9}$ (B) 12cm
(2) (A) 1296cm² (B) 500cm²

Leçon (2 - 4)

(1) (A) 6 (B) 3 (C) 10 (D) 4
(2) a, b (3) a (10) (B) 4.5cm
(11) 5cm (12) 8 m (13) 49cm

Exercices généraux

(1) a, b, d (2) 2 cm (4) (B) 9 : 16
(5) (B) 4 cm (6) x = 11cm, y = 16.5cm
(7) 4.5 m (8) (A) 4,40cm (B) $-\frac{1}{2}$, 14cm

Epreuve de l'unité

(1) (C) 9 : 25 (E) 12cm
(2) 4cm (3) 9cm (5) 12cm

Épreuve cumulative

(1) d (2) c (3) b (4) d
(8) $6\sqrt{3}$, 9, $3\sqrt{3}$ (10) BE = 8cm, BC = 12cm

Unité (3) Théorèmes de la proportion dans un triangle

Leçon (3 - 1)

(1) (A) $\frac{8}{3}, \frac{3}{5}$ (B) $\frac{3}{4}, \frac{3}{7}$
(3) (A) 4.5 (B) 5 (C) $\frac{5}{2}$
(4) CE = 4.5cm (5) ZM = 13.5
(6) (A) 3 (B) 5 (C) 9 (D) 3
(7) (A) n'est pas parallèle à (B) est parallèle à
(C) est parallèle à
(8) $\frac{XL}{XY} = \frac{2}{5}, \frac{XM}{XZ} = \frac{2}{5}$ $\therefore \overline{LM} // \overline{YZ}$
(15) (A) EF (B) DF (C) DE (D) DF
(17) (A) MF = 10cm (B) AM = 10.8 cm
(19) (A) x = 8, y = 3 (B) x = 4, y = 3

Leçon (3 - 2)

(1) (A) $\frac{BA}{AC}$ (B) $\frac{CD}{DB}$ (C) $\frac{DC}{AD}$ (D) BD × AC
(2) (A) 11 (B) 4 (C) 2 (D) 2
(3) AB = 8cm, BC = 10cm
(4) (A) 4,22 (B) 25, 15 $(5 + \sqrt{5})$ (C) 6, 25
(5) DE = 8cm, AD = $2\sqrt{15}$ cm, AE = $2\sqrt{10}$
(10) Dans $\triangle ABC$, BC = 10 - 4 = 6cm
$\because \frac{BA}{AC} = \frac{2}{3}$ et $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$ $\therefore \overrightarrow{AD}$ est une bissectrice de $\angle A$
Dans $\triangle ABF$ $\because \overline{AE}$ est une bissectrice de $\angle A$,
$\overline{AE} \perp \overline{BF}$
$\therefore \triangle ABF$ est isocèle et , AF = 6cm
$\because$ les deux triangles BAF et BCF ont un sommet commun B
$\overline{AF} \subset \overline{AC}$, $\overline{CF} \subset \overline{AC}$
$\therefore$ Les deux triangles ont la même hauteur d'où:
$\frac{\text{Aire } (\triangle ABF)}{\text{Aire } (\triangle CBF)} = \frac{AF}{CF} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$

Leçon (3 - 3)

(1) (A) Le point A se trouve à l'intérieur du cercle, AM = 8 cm
(B) Le point B se trouve à l'extérieur du cercle, BM = 14 cm
(2) (A) 63 (B) -161 (C) 0 (D) 1
(5) (B) XC = $6\sqrt{2}$, XF = 6 cm.
(6) $18\sqrt{2}$ cm.
(7) (B) XC = $6\sqrt{6}$, XF = 6cm.
(8) (A) x = 110 (B) y = 10 (C) z = 45 (D) x = 31
(9) (A) 26° (B) 74° (C) 20°
(10) environ 24,43 cm (11) 100°

Exercices généraux

(2) (A) x = 6 (B) x = 14 (C) x = 4.5, y = 11
(4) Soit M le point d'intersection des deux supports
$\therefore \triangle MAB \sim \triangle MFE$, $\frac{EF}{AB} = \frac{1}{5}$
$\because$ AB = 120cm $\therefore$ EF = 24cm

Epreuve de l'unité

(1) (A) $x = 3\sqrt{2}$ (B) $y = 19, Z = \sqrt{15}$ (C) $x = 60$
(4) (A) AB = 6cm, AE = 3cm, CD = 5cm
(B) $P_M(x) = -3 \times 2 = -6$, $P_M(X) = 0$

Épreuve cumulative

(1) c (2) b (3) c (4) a
(5) b (6) d (7) c (8) 6cm

Unité (4) : Trigonométrie

Leçon (4 – 1)

(1) (F) 170° (H) troisième (I) 30° (2) (C)

Réponse de certains exercices

(3) A -306° B 270° C 235° D -301°

(4) A premier B troisième C quatrième D deuxième

(7) A 177° B 143° C 45° D 150°

Leçon (4 – 2)

(1) D (2) C (3) D (4) C

(5) C (6) b (7) A (8) B

(10) A $\frac{5\pi}{4}$ B $\frac{4}{3}\pi$ C $\frac{3}{4}\pi$ D $\frac{5}{3}\pi$

(11) A 0.988^{rad} B 0.442^{rad} C 2.807^{rad}

(14) 4.2cm (15) 2.175 , $124^\circ\ 37'\ 6''$

(16) 75° , 1.309 (17) $\frac{5}{3}\pi$ (18) 28.57cm (19) 16.76cm

(20) 2πcm (21) 4712 km (22) 29cm

(23) A $\frac{\pi}{3}$ B 8 h C 20π (24) $y = \sqrt{3}x$

Leçon (4 – 3)

(1) C (2) A (3) C (4) A

(5) C (6) C (7) A (8) A

(9)

	A	B	C	D
cosθ	$\frac{2}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-4}{5}$
sinθ	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-3}{5}$
tgθ	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	$\frac{3}{4}$

(10) A (–) B (+) C (+)

(12) A -1 B $\frac{4}{3}$

(13) 30° (14) Réponse d'Ahmed (15) correcte

Leçon (4 – 4)

(1) -cosθ (2) - tgθ (3) - cosecθ (4) sinθ

(5) cosθ (6) - tgθ (7) cosecθ (8) - sinθ

(18) A (19) B (20) D (21) C

(23) A $16^\circ, 80^\circ$ B 25° C 10° D 60°

Leçon (4 – 5)

(1) [-1, 1] (2) [-2, 2] (3) 4 (4) -3

figure (1) 1sin θ figure (2) cos θ

(5) A 1, -1, [-1, 1] B 3, -3 [-3, 3]

C $\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}, [\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}]$

(6) A [-4, 4] B [-3, 3]

Leçon (4 – 6)

(1) A (2) C

(1) A $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ B $\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$ C $-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$

(3) A $-3, -\frac{1}{3}$ B $\frac{-5}{3}, \frac{-3}{5}$ C $\frac{3}{4}, \frac{4}{3}$

(4) A 30° B 135° C $306^\circ\ 52'\ 12''$

(5) A $36^\circ\ 52'\ 12''$ B $64^\circ\ 9'\ 4''$ C $55^\circ\ 30'\ 13''$

(6) A $13^\circ\ 37'\ 37''$, $166^\circ\ 22'\ 23''$ B $129^\circ\ 56'\ 28''$, $230^\circ\ 3'\ 13''$

(7) A $160^\circ\ 31'\ 44''$ B -0.9428 , -0.3536 , -1.0607

Exercices généraux

(1) A 2.09^{rad} B 1.13^{rad} C 3.85^{rad}

(2) A 300° B 90° C $64^\circ\ 10'\ 17''$

(3) A 9.6cm B $82^\circ\ 45'\ 38''$

(4) A $-\sqrt{3}$ B $\frac{1}{2}$ C $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(5) A $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $tg\theta = \frac{3}{4}$

B $\cos\theta = \frac{5}{13}$, $\sin\theta = \frac{-12}{13}$, $tg\theta = \frac{-12}{5}$

(6) A $45^\circ, 225^\circ$ B $210^\circ, 330^\circ$ C $30^\circ, 330^\circ$ D $10^\circ, 300^\circ$

Épreuve cumulative

(1) A (2) C (3) C

(6) A $\frac{3}{5}$ B $\frac{4}{5}$ C $\frac{3}{5}$ D $36^\circ\ 52'\ 12''$

(7) A 25 B $\sin 25 = \frac{A}{25}$ C 10.14m

تم الطبع بالشروق الحديثة ـ القاهرة
بالمواصفات الفنية الآتية

عدد الصفحات بدون الغلاف : ٢٢٠ صفحة

عدد الملازم بدون الغلاف : ١٣,٧٥ ملزمة

المقـــــــاس : $\frac{١}{٨}$ ٥٧ × ٨٢ سم

نــــوع الــــورق : لا يقل الداخلى عن ٨٠ جرام والغلاف ٢٠٠ جرام

ألــــوان الطبــــع : ٤ لون للداخلى والغلاف

رقــم الكتــــاب : ٣٩/١/١١/١٥/١٠/١٥٨٤

http://elearning.moe.gov.eg

الشروق
الحديثة للطباعة والتغليف

القاهرة : ٨ شارع سيبويه المصرى ـ ت : ٢٤٠٢٣٣٩٩ ـ فاكس : ٢٤٠٣٧٥٦٧ (٠٢)
مدينة العبور ـ المنطقة الصناعية